Майер Роберт Валерьевич, robert_maier@mail.ru
профессор кафедры ИТФО физического факультета
ГОУ ВПО “Глазовский государственный педагогический институт”

РАСЧЕТ ФОРМЫ НИТИ И ПЛАСТИНЫ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ НА ПЭВМ

Примером задачи на вариационное исчисление является задача о расчете формы, которую принимает неоднородная нить или пластина в поле тяжести Земли.

Задача 1. Имеется неоднородная нить или цепь. Определите форму, которую она примет в однородном поле тяжести, если ее концы закрепить в фиксированных точках.

Нить примет форму, при которой ее потенциальная энергия минимальна. Мысленно заменим нить совокупностью материальных точек с массами m_i, которые связаны друг с другом пружинками жесткостью k и длиной b. Расстояние между соседними частицами и потенциальная энергия всей системы определяются уравнениями:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}, \qquad U = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{k(l_i - b)^2}{2} + m_i g y_i \right).$$

Допустим, правый конец нити привязан математическому маятнику длиной c и массой m_N. Заменим нить маятника пружиной жесткостью k, тогда к потенциальной энергии системы следует прибавить величину:

$$\Delta U = \frac{k(l_i - c)^2}{2}$$

Используется программа ПР – 1. В ней последовательно перебираются материальные точки m_i, случайным образом изменяются их координаты и каждый раз вычисляется получающееся значение потенциальной энергии системы. Если при смещении данной частицы потенциальная энергия уменьшилась, то это новое состояние системы принимается, иначе — отвергается. Результат моделирования представлен на рис. 1.

```
{$N+}                                                    { ПР – 1 }
uses  dos, crt, graph;
const  N=20; b=20; b1=100; k=400; g=10; pi=3.1415;
var U,U0,U1,x1,y1,l,l1,dU: Real; i,j,t,Gd,Gm: integer;
    x,y,m: array [1..N] of single; Energiya: string;
Procedure Energy;
var i: integer;
```

```
begin U:=0;
For i:=2 to N do begin l:=sqrt(sqr(x[i]-x[i-1])+sqr(y[i]-y[i-1]));
  If l > b then dU:=k*sqr(l-b)/2; U:=U+dU+m[i]*g*y[i]; end;
  l1:=sqrt(sqr(x[N]-400)+sqr(y[N]-60)); U:=U+k*sqr(l1-b1)/2;
end;
BEGIN Randomize; Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
For i:=1 to N do begin x[i]:=20*i; y[i]:=-2*i;
   If  i < N then m[i]:=2 else m[i]:=10; end;
Repeat inc(t);
 For i:=2 to N do begin x1:=x[i]; y1:=y[i]; Energy; U0:=U;
    x[i]:=x[i]+random(100)/25-2; y[i]:=y[i]+random(100)/25-2; Energy; U1:=U;
    If  U1 > U0 then begin x[i]:=x1; y[i]:=y1; end;
    end; Energy; Str(U,Energiya);
 If  t mod 500=1 then begin cleardevice;
    For i:=1 to N-1 do begin circle(10+round(x[i]),150-round(y[i]),3);
       line(10+round(x[i]),150-round(y[i]),10+round(x[i+1]),150-round(y[i+1])); end;
    line(10+round(x[N]),150-round(y[N]),410,150-60);
    OuttextXY(10,450,Energiya);
 end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

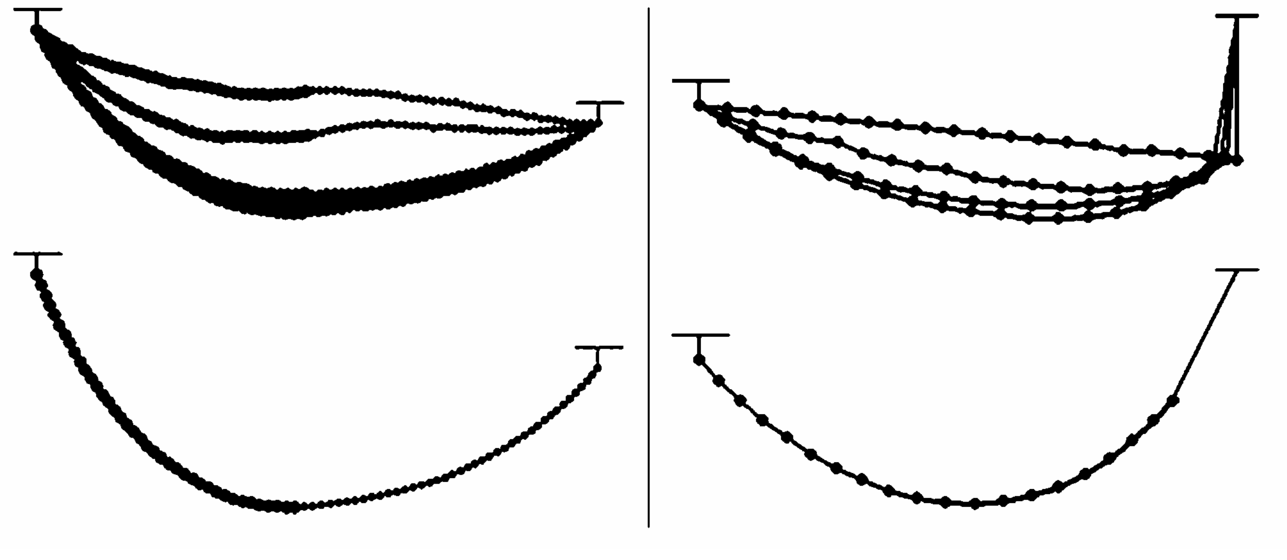

Рис. 1. Результаты вычисления формы нити.

Задача 2. Имеется неоднородная цепь, ее концы закреплены в фиксированных точках. К заданной точке цепи привязана невесомая нить, которая перекинута через неподвижный блок и соединена с грузом известной массы M . Требуется рассчитать форму нити.

Как и при решении задачи 1, заменим цепь совокупностью материальных точек, соединенных пружинами жесткостью k и длиной b. Пусть блок имеет небольшие размеры и его координаты равны X и Y, а перекинутая через него нить привязана к k–ой материальной точке с координатами x_k и y_k. Тогда при расчете потенциальной энергии системы следует учесть потенциальную энергию груза массы M :

$$\Delta U = Mg\sqrt{(x_k - X)^2 + (y_k - Y)^2} + C.$$

Если к некоторой i–ой точке цепи привязан груз известной массы (без блока), то при расчете формы цепи необходимо увеличить массу i–ой точки на массу груза. Во всем остальном задача решается аналогично предыдущей задаче 1: случайным образом на небольшие величины изменяются координаты частиц, вычисляется потенциальная энергия системы, определяется положение системы, при которой потенциальная энергия минимальна (программа ПР – 2). Результат решения приведен на рис. 2.

```
{$N+}                                                      { ПР – 2 }
uses  dos, crt, graph;
const  N=80; b=5; k=200; g=10; pi=3.1415;
var U,U0,U1,x1,y1,l,dU,S,mm: real;
   i,j,t,r,Gd,Gm: integer; Energiya: string;
   x,y,m: array [1..N] of single;
Procedure Energy;
var i: integer;
begin U:=0;
For i:=2 to N do begin l:=sqrt(sqr(x[i]-x[i-1])+sqr(y[i]-y[i-1]));
          If  l > b then dU:=k*sqr(l-b)/2; U:=U+dU+m[i]*g*y[i]; end;
S:=sqrt(sqr(x[40]-200)+sqr(y[40]-20));
U:=U+mm*g*S;
end;
BEGIN  Randomize;
Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
For i:=1 to N do begin x[i]:=6*i; y[i]:=-i;
  If  I < 40 then m[i]:=2 else m[i]:=4; m[20]:=30; end; mm:=25;
```

```
Repeat inc(t);
For i:=2 to N-1 do begin  x1:=x[i]; y1:=y[i]; Energy; U0:=U;
    x[i]:=x[i]+random(100)/25-2;  y[i]:=y[i]+random(100)/25-2; Energy; U1:=U;
    If  U1 > U0 then begin x[i]:=x1; y[i]:=y1; end;
    end; Energy; Str(U,Energiya);
If t mod 500=1 then
   begin cleardevice;
     For i:=1 to N-1 do begin If  i < 40 then r:=1 else r:=4;
        circle(10+round(x[i]),150-round(y[i]),2); circle(10+round(x[i]),150-round(y[i]),r);
        line(10+round(x[i]),150-round(y[i]),10+round(x[i+1]),150-round(y[i+1])); end;
    line(10+round(x[40]),150-round(y[40]),200,20);
    OuttextXY(10,450,Energiya);  end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

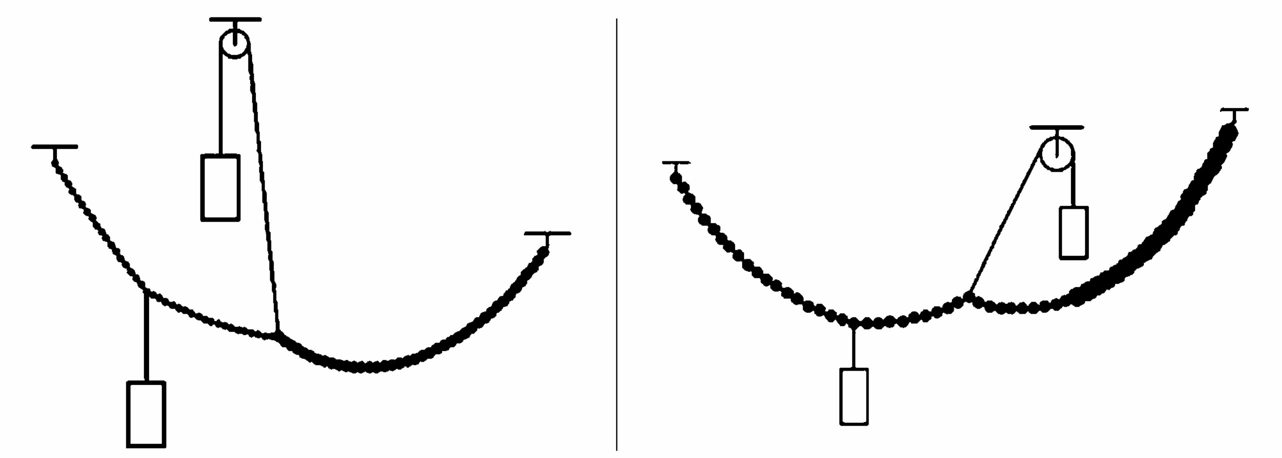

Рис. 2. Результат вычисления формы нити.

Задача 3. Рассчитайте форму длинной упругой пластины, находящейся в однородном поле тяжести. Пластина неоднородная, один ее конец закреплен.

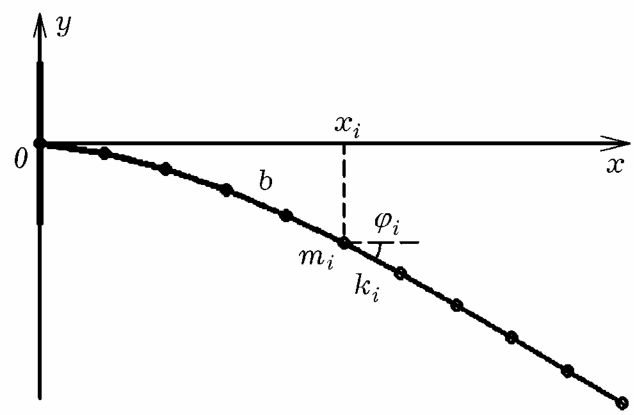

Рис. 3. К вычислению формы упругой пластины.

Пластину представим как систему материальных точек m_i, связанных недеформируемыми стержнями длиной b. При изгибе пластины изменяются угол φ_i и координаты x_i, y_i. Потенциальная энергия системы равна:

$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i(\varphi_i - \varphi_{i-1})}{2} + m_i g y_i \ .$$

В используемой программе ПР – 3 реализуется следующий алгоритм. Последовательно перебираются материальные точки m_i и случайным образом изменяются углы φ_i. Каждый раз пересчитывается энергия системы. Если она увеличилась, то эта конфигурация отвергается, а если уменьшилась — принимается. В результате определяется устойчивое состояние равновесия системы, соответствующее минимуму потенциальной энергии. На рис. 4 представлены результаты расчетов для неоднородного стержня (жесткости левой и правой половин различны), к концу которого прикреплен груз (масса m[N] в 5 раз больше масс других материальных точек).

```
{$N+}                                                   { ПР – 3 }
uses  dos, crt, graph;
const  N=20; b=20; g=10; pi=3.1415;
var U,U0,U1,x1,y1,fi0,l,l1,dU: Real; i,j,t,Gd,Gm: integer;
     fi,x,y,m,k: array [0..N] of single; Energiya: string;
Procedure Energy;
var i: integer;
begin U:=0;
  For i:=1 to N do begin x[i]:=x[i-1]+b*cos(fi[i]); y[i]:=y[i-1]-b*sin(fi[i]); end;
  For i:=1 to N do begin dU:=k[i]*sqr(fi[i]-fi[i-1])/2; U:=U+dU+m[i]*g*y[i]; end;
end;
BEGIN
Randomize; Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
For i:=0 to N do begin fi[i]:=0;
   If i < N-1 then m[i]:=0.02 else m[i]:=0.1;
   If i < N/2 then k[i]:=20000 else k[i]:=1000; end; fi[0]:=-0.5;
Repeat inc(t);
  For i:=N downto 1 do
    begin
      fi0:=fi[i]; Energy; U0:=U; fi[i]:=fi[i]+pi*(random(200)/100-1)/20;
```

```
    Energy; U1:=U; If U1 > U0 then fi[i]:=fi0;
   end;
   Energy; Str(U,Energiya);
 For i:=1 to N do begin x[i]:=x[i-1]+b*cos(fi[i]); y[i]:=y[i-1]-b*sin(fi[i]); end;
 If t mod 50=1 then
   begin cleardevice;
     For i:=0 to N do begin circle(20+round(x[i]),150-round(y[i]),3);
     line(20+round(x[i]),150-round(y[i]),20+round(x[i-1]),150-round(y[i-1])); end;
     circle(20+round(x[N]),150-round(y[N]),5);
     OuttextXY(10,450,Energiya);
  end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

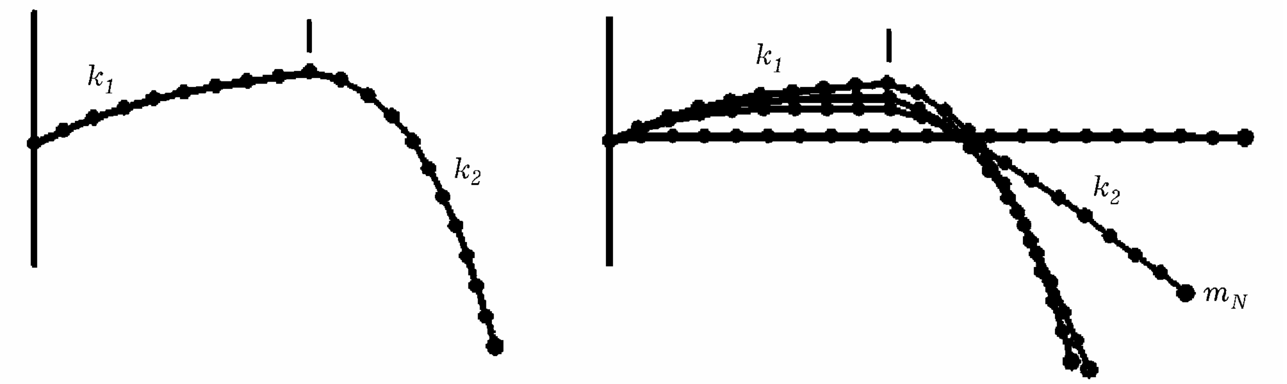

Рис. 4. Результаты вычисления формы упругой пластины.

Эти и другие задачи, а также способы их решения с помощью ПЭВМ, рассмотрены в пособиях [1, 2], которые могут быть скачаны с сайта http://maier-rv.glazov.net .

Литература

1. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений: Монография. — Глазов: ГГПИ, 2009. — 111 с.
2. Майер Р.В. Задачи, алгоритмы, программы [Электронный ресурс] (Web – сайт http://komp-model.narod.ru).
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. — М.: Эдиторал УРСС, 2000. — 208 с.