

Майер Р.В.

## ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

С точки зрения кибернетической педагогики система “учитель–ученик” является самоадаптирующейся. В ней регулируемая величина (уровень знаний учащегося  $Z$ ) стремится достичь заданной величины (уровня требований учителя  $U$ ). Если  $Z < U$ , то учащиеся увеличивают свои знания так, чтобы они соответствовали уровню требований. Проблема состоит в следующем: как, зная параметры ученика, его исходный уровень знаний и воздействие, оказываемое учителем, предсказать знания ученика в последующие моменты времени. Метод имитационного моделирования позволяет создать компьютерную программу, симулирующую поведение системы “учитель–ученик” и исследовать влияние ее параметров на результат обучения.

Известно, что мотивация  $M$  к обучению зависит от уровня  $U$  требований учителя (количества знаний, которые необходимо усвоить) и уровня знаний  $Z$  ученика:  $M = M(U, Z)$ . Чем больше мотивация  $M$  и знания  $Z$  учащегося, тем легче он устанавливает ассоциативные связи и быстрее усваивает новые знания. Учитывая забывание, получаем, что скорость увеличения знаний выражается уравнением:  $dZ / dt = \alpha Z M - \gamma Z$ , где  $\alpha$  и  $\gamma$  — коэффициенты научения и забывания ученика. Мотивация прямо пропорциональна разности между уровнем предъявляемых требований  $U$  и уровнем знаний  $Z$ :  $M = U - Z$ , а когда  $U - Z$  превышает некоторый предел  $C$ , мотивация исчезает ( $M = 0$ ). Тогда скорость изменения знаний ученика:

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{cases} \alpha Z(U - Z) - \gamma Z, & U \leq Z + C, \\ -\gamma Z, & U > Z + C, \end{cases}$$

Когда  $Z$  мало, скорость роста уровня знаний невысока из-за отсутствия возможности образования ассоциативных связей. По мере увеличения  $Z$  она растет, но при  $Z \rightarrow U$  уменьшается за счет снижения мотивации.

Учтем, что сложность  $S_r$  изучаемой  $r$ -ой темы курса может зависеть от уровня знаний  $Z_k$  учащихся  $k$ -ой темы. Пусть эта зависимость выражается так:  $S_r = a + b \exp(-cZ_k)$ , где  $a, b, c > 0$ ,  $a + b \leq 1$ ,  $b < a$ . Сложность темы лежит в интервале  $[0, 1]$ . Минимальная сложность  $S = 0$  соответствует очень простой теме, максимальная  $S = 1$  — теме, которую ученик не может понять в принципе (требуется очень большое время). Получаем:

$$\frac{dZ_{ij}}{dt} = \alpha_j(1 - S_{ij})Z_{ij}(U_i - Z_{ij}) - \gamma_j Z_{ij}, \quad Z_{ij} > 0, \quad U_i > Z_{ij}, \quad \alpha_j, \gamma_j > 0,$$

где  $Z_{ij}$  — уровень знаний  $j$ -ым учеником  $i$ -ой темы,  $U_i$  — предъявляемый уровень требований, то есть количество знаний, сообщенных учителем, которые должен усвоить ученик. В конечных разностях получаем:

$$Z_{ij}^{t+1} = Z_{ij}^t + (\alpha_j(1 - S_{ij})Z_{ij}^t(U_i - Z_{ij}^t) - \gamma_j Z_{ij}^t)\Delta t.$$

После изучения темы учитель проводит контрольную работу (тест) из  $m$  задач  $K = \{z_1(1), z_2(1,2), \dots, z_m(4,5)\}$ . Если для решения задачи  $z_k(i)$  достаточно знаний  $i$ -ого вопроса, то результат или вероятность ее решения  $R_k$  равен уровню усвоения учащимся данного вопроса:  $R_k = Z_i / U_i$ . Если  $k$ -ая задача  $z_k(r, s)$  комбинированного типа и требует знаний  $r$ -ой и  $s$ -ой темы, то по закону умножения вероятностей  $R_k = (Z_r / U_r)(Z_s / U_s)$ . Программа, моделирующая процесс обучения, должна содержать цикл по времени  $t$ , в котором вычисляется скорость увеличения знаний, определяется уровень знаний в следующий момент времени  $t + 1$ , результаты выводятся на экран, после чего все повторяется снова.

**Задача 1.** Необходимо промоделировать изучение курса из пяти не связанных между собой тем, которые излагаются последовательно друг за другом: 1, 2, 3, 4, 5. Сложности  $S_i$  тем и отводимое на изучение время  $T_i$  заданы двумя матрицами:  $S = (0,3; 0,1; 0,4; 0,7; 0,2)$  и  $T = (1,2; 1,7; 1,5; 1,8; 2,4)$ . В конце курса

проводится контрольная работа из пяти задач:  $K = \{z_1(1), z_2(1,2), z_3(2,3), z_4(3,4), z_5(3,5)\}$ .

```

uses crt, graph;                                     { ПР-1 }
var i,j,k,DV,MV: integer;
a,g,U,Zn,dt,t1,t,Zad1,Zad2,Zad3,Zad4,Zad5,Rez: real;
Z,S,time: array[0..6]of real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
a:=0.5; g:=0.01; dt:=0.01; U:=1;
time[1]:=5; time[2]:=4; time[3]:=6; time[4]:=3; time[5]:=4;
S[1]:=0.5; S[2]:=0.1; S[3]:=0.3; S[4]:=0.2; S[5]:=0.4;
line(0,450,640,450);
For i:=1 to 5 do begin t:=0; t1:=t1+time[i-1]; Zn:=Zn+Z[i-1];
Repeat t:=t+dt; Z[i]:=Z[i]+a*(1-S[i])*(U-Z[i])*dt;
For k:=1 to 5 do Z[k]:=Z[k]-g*Z[k]*dt;
circle(10+round((t1+t)*20),450-round(100*(Zn+Z[i])),1);
For k:=1 to 5 do
circle(10+round((t1+t)*20),450-round(100*(Z[k])),1);
circle(10+round((t1+t)*20),450-round(100),1);
until (t>time[i])or(KeyPressed); end;
Zad1:=Z[1]; Zad2:=Z[1]*Z[2]; Zad3:=Z[2]*Z[3];
Zad4:=Z[3]*Z[4]; Zad5:=Z[3]*Z[5];
Rez:=(Zad1+Zad2+Zad3+Zad4+Zad5)/5;
circle(10+round(550),450-round(100*Rez),2);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

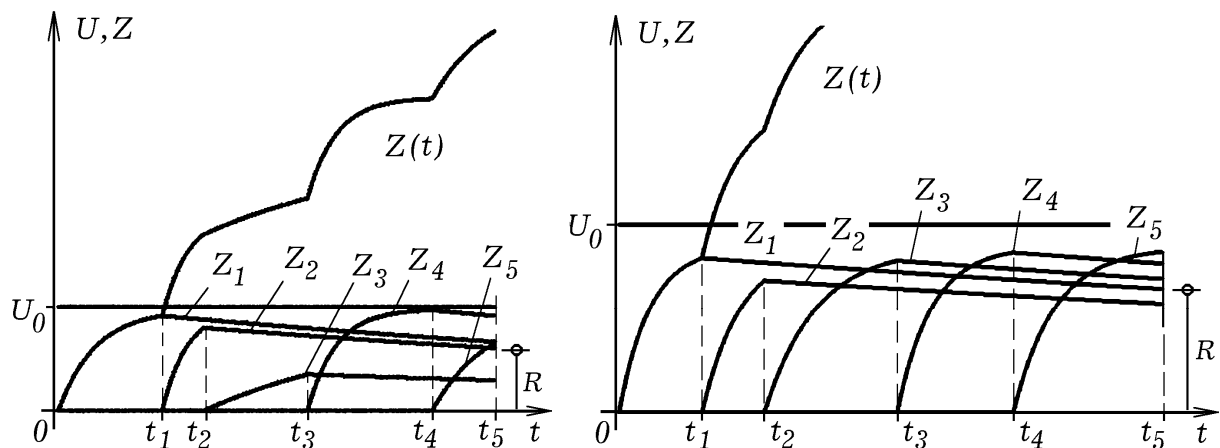


Рис. 1. Моделирование изучения несвязанных между собой тем.

Используемая программа ПР-1 содержит цикл по времени, в котором пересчитываются значения  $Z[i]$  для каждой  $i$ -ой темы ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). В программе определяется суммарный уровень знаний. Результаты выводятся на экран в графическом виде (рис.1). Оценка за контрольную работу рассчитывается по

формуле:  $R = (Z_1 + Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_4 + Z_3Z_5)/5$ . На рис. 1 оценка  $R$  соответствует отрезку в правой части графика.

**Задача 2.** Группа учащихся изучает дисциплину из четырех независимых тем. Каждая тема заканчивается контрольной работой, а в конце курса предусмотрен экзамен. Уровень требований по каждой теме растет по закону:  $U_i = 0,05\tau$ ; длительности изучения каждой темы заданы:  $T = \{90; 200; 120; 210\}$ . Необходимо промоделировать этот процесс.

```

uses crt, graph;                                     { ПР-2 }
const g=0.0015; dt=0.03; T1=90; T2=200; T3=120; T4=210;
t_1=700; t_2=760; N=4;
var i,i1,i2,j,DV,MV: integer; a,t,Sum: real;
M,Z,U,tt: array[0..5] of real;
Procedure Raschet;
Begin If (t>tt[i-1])and(t<tt[i]) then
      U[i]:=0.05*(t-tt[i-1]) else U[i]:=0;
If (U[i]-Z[i]<2)and(U[i]>Z[i]) then
      M[i]:=U[i]-Z[i] else M[i]:=0;
If (t>t_1)and(t<t_2)and(Z[i]<0.05*(tt[i]-tt[i-1]))
      then M[i]:=0.05*(tt[i]-tt[i-1])-Z[i];
If (t>t_1)and(t<t_2) then a:=0.05;
Z[i]:=Z[i]+a*M[i]*dt-g*Z[i]*dt; Sum:=Sum+Z[i]; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,450,640,450); a:=0.035;
tt[1]:=T1; tt[2]:=tt[1]+T2; tt[3]:=tt[2]+T3; tt[4]:=tt[3]+T4;
Repeat t:=t+dt; Sum:=0; For i:=1 to N do begin Raschet; end;
For i:=1 to N do begin
circle(10+round(t/1.5),450-round(10*Sum),1);
circle(10+round(t/1.5),450-round(10*Z[i]),1);
circle(10+round(t/1.5),450-round(10*U[i]),1); end;
until KeyPressed; ReadKey; CloseGraph;
END.

```

Используется программа ПР-2, результаты моделирования представлены на рис. 2.1. Видно, что при изучении каждой темы уровень требований растет пропорционально времени. На каждом следующем занятии учитель требует овладения новыми знаниями и сохранения знаний, полученных ранее. Изучение темы заканчивается проведением контрольной работы, после чего учитель вспоминает о ней только на экзамене. Во время изучения  $i$ -ой темы увеличивается количество знаний  $Z_i$  по этой теме, затем  $Z_i$  уменьшается по экспоненци-

альному закону. При подготовке к экзамену учащиеся вспоминают материал по всем темам, их знания увеличиваются. После экзамена уровень знаний уменьшается из-за забывания.

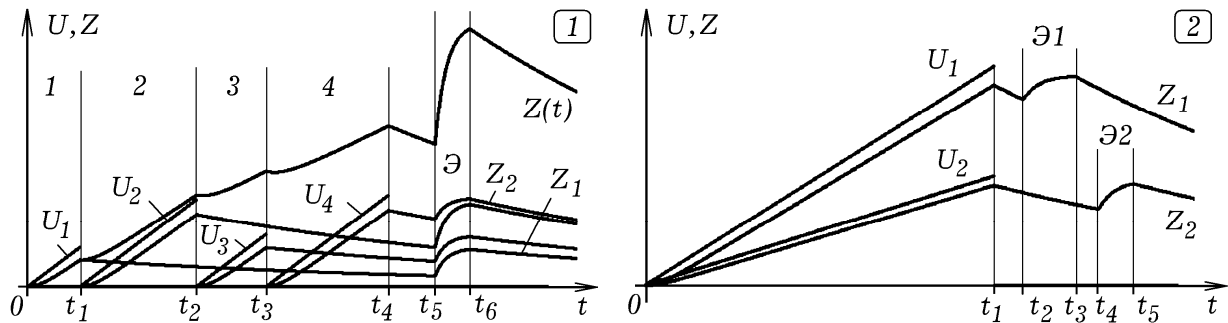


Рис. 2. Изучение курса, заканчивающееся экзаменами.

```

uses crt, graph;
const a=0.035; g=0.0015; dt=0.03; T1=600;
t_1=650; t_2=740; t_3=780; t_4=840; N=2; U_ex=12;
var i,i1,i2,j,DV,MV : integer; t: real;
M,Z,U,b,tt: array[0..5] of real;
Procedure Raschet;
Begin If t<T1 then U[i]:=b[i]*t else U[i]:=0;
If (U[i]-Z[i]<3)and(U[i]>Z[i]) then M[i]:=U[i]-Z[i] else M[i]:=0;
If (t>t_1)and(t<t_2)and(Z[1]<b[1]*T1)then M[1]:=b[1]*(T1)-Z[1];
If (t>t_3)and(t<t_4)and(Z[2]<b[2]*T1)then M[2]:=b[2]*(T1)-Z[2];
Z[i]:=Z[i]+a*M[i]*dt-g*Z[i]*dt; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,450,640,450); b[1]:=0.02; b[2]:=0.01;
Repeat t:=t+dt; For i:=1 to N do begin Raschet; end;
For i:=1 to N do begin
circle(10+round(t/1.5),450-round(20*Z[i]),1);
circle(10+round(t/1.5),450-round(20*U[i]),1); end;
until KeyPressed; ReadKey; CloseGraph;
END.

```

**Задача 3.** Ученик в течение нескольких месяцев одновременно изучает два курса. Учитель на каждом последующем занятии требует знания всего предыдущего материала, причем уровень требований растет пропорционально времени  $t$ . В конце семестра предусмотрены экзамены по всем изученным вопросам. Необходимо промоделировать этот процесс.

Динамика изменения знаний  $Z_1$  и  $Z_2$  видна из рис. 2.2 (программа ПР-3). В течение семестра (от 0 до  $t_1$ ) уровень знаний монотонно растет, затем не-

сколько уменьшается. При подготовке к экзаменам уровень соответствующих знаний снова возрастает, а после сдачи экзамена — убывает.

**Задача 4.** При изучении некоторой темы учащиеся на восьми уроках получают знания двух типов: 1) знания  $Z_{n-1}$ , которые изучаются один раз и больше не используются; 2) знания  $Z_{n-2}$ , которые после изучения используются на последующих уроках. Количества знаний, которые необходимо усвоить на каждом уроке, заданы:  $U_1=(30,60,90,120,150)$ ,  $U_2=(70,70,70,70,70)$ .

```
uses crt, graph;                                     { ПР-4 }
const a=0.035; g=0.005; dt=0.03; T1=100;
var i,i1,i2,j,k,DV,MV : integer; t,ZZ,UU: real;
M1,M2,Z1,Z2,U1,U2,tt: array[0..10] of real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
U1[1]:=30;U1[2]:=60;U1[3]:=90;U1[4]:=120;U1[5]:=150;
U2[1]:=70;U2[2]:=70;U2[3]:=70;U2[4]:=70;U2[5]:=70;
line(0,450,640,450); tt[1]:=T1;
Repeat t:=t+dt; i:=1;
k:=round(t) div T1; U1[1]:=k*50+50;
If t>800 then U1[1]:=0;
If U1[i]>Z1[i] then M1[i]:=U1[i]-Z1[i] else M1[i]:=0;
Z1[i]:=Z1[i]+a*M1[i]*dt-g*Z1[i]*dt;
circle(10+round(t/1.8),450-round(1*Z1[i]),1);
circle(10+round(t/1.8),450-round(1*U1[i]),1);
For j:=1 to 10 do U2[j]:=0; U2[k+1]:=50; ZZ:=0;
For i:=1 to 8 do begin
If U2[i]>Z2[i] then M2[i]:=U2[i]-Z2[i] else M2[i]:=0;
Z2[i]:=Z2[i]+a*M2[i]*dt-g*Z2[i]*dt;
circle(10+round(t/1.8),450-round(1*Z2[i]),1);
circle(10+round(t/1.8),450-round(1*U2[i]),1);
ZZ:=ZZ+Z2[i]; end; circle(10+round(t/1.8),450-round(ZZ),1);
until (KeyPressed)or(t>1500); ReadKey; CloseGraph;
END.
```

Учитель в течение  $i$ -той недели сообщает  $U_{1i}$  знаний  $Z_{n-1}$  и  $U_{2i}$  знаний  $Z_{n-2}$ , требуя их полного усвоения, а в конце проводит контрольную работу по этому материалу. Так же проходят  $(i+1)$ -ая неделя и т.д. При этом уровень требований  $U_{1i}$  по знаниям  $Z_{n-1}$  с каждой неделей скачкообразно увеличивается: ученик должен помнить информацию, полученную на предыдущих уроках и изучаемую в течение текущей недели. Уровень требований  $U_{2i}$ , касающийся знаний  $Z_{n-2}$ , по мере изучения курса остается постоянным.

Результаты использования компьютерной программы ПР–4 представлены на рис. 3.1. Видно, что уровень знаний  $Z_{н-1}$  по мере изучения курса возрастает, в то время как уровень знаний  $Z_{н-2}$  остается практически постоянным. Начиная с некоторого момента, для знаний  $Z_{н-2}$  наступает динамическое равновесие: количество знаний, приобретаемых учеником за время  $\Delta t$ , оказывается равным количеству знаний забываемым им за то же время.

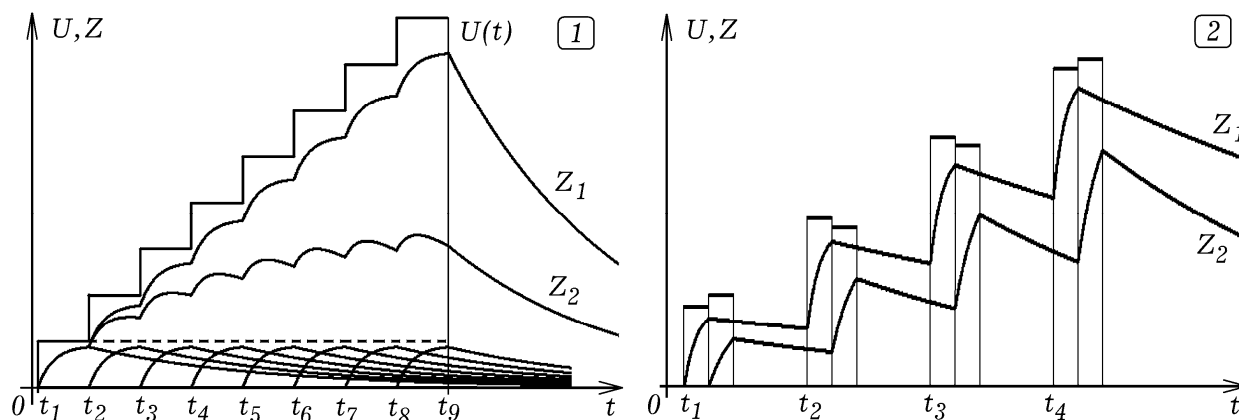


Рис. 3. Имитационное моделирование процесса обучения.

**Задача 5.** Учащийся в течение четырех недель посещает уроки по предмету 1 и 2 (физики и литературы), следующие друг за другом раз в неделю. Известно количество знаний  $U_i$ , которое должен усвоить ученик, его коэффициенты научения  $\alpha$  и забывания  $\gamma$  по предмету 1 равны 0,025 и 0,0005, а по предмету 2 — 0,012 и 0,001. Необходимо исследовать изменение уровня знаний учащегося по мере изучения обоих курсов.

Используется компьютерная программа ПР–5, результаты моделирования представлены на рис. 3.2. В цикле по времени отдельно вычисляются  $Z_1$  и  $Z_2$ , результаты выводятся на экран в виде графиков. Видно, как во время занятий растет уровень знаний по предмету 1 и предмету 2. В перерывах между занятиями уровень знаний снижается вследствие забывания.

```

uses crt, graph; { ПР-5 }
type Uroven = array[1..20] of integer;
const aF=0.025; aL=0.012; gF=0.0005; gL=0.001; dt=0.03; T1=80;
UF: Uroven= (35,0,0,0,0,50,0,0,0,0,90,0, 0,0,0,120,0,0,0,0);
UL: Uroven= (0,40,0,0,0,0,60,0,0,0,0,100,0,0,0,0,130,0,0,0);
var i,i1,i2,j,k,DV,MV: integer; t,ZZ,UU,ZF,ZL: real;
MF,ML,U1,U2,tt: array[0..10] of real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,450,640,450); write(UF[1]);
Repeat t:=t+dt;
i:=round(t) div T1; If i>17 then i:=15;
If UF[i]>ZF then MF[i]:=UF[i]-ZF else MF[i]:=0;
ZF:=ZF+aF*MF[i]*dt-gF*ZF*dt;
circle(0+round(t/3),450-round(2*ZF),1);
circle(0+round(t/3),450-round(2*UF[i]),1);
if UL[i]>ZL then ML[i]:=UL[i]-ZL else ML[i]:=0;
ZL:=ZL+aL*ML[i]*dt-gL*ZL*dt;
circle(0+round(t/3),450-round(2*ZL),1);
circle(0+round(t/3),450-round(2*UL[i]),1);
until (KeyPressed)or(t>2000); Readkey; CloseGraph;
END.

```

**Задача 6.** Учащийся изучает тему, состоящую из шести вопросов. Учитель требует, чтобы в конце обучения учащийся усвоил бы все вопросы. Пусть к концу первой недели учитель выдвигает требования  $U_1$ : выучить 15 иностранных слов. К концу второй недели требования увеличиваются до уровня  $U_2$ : следует выучить новые 20 слов и не забыть ранее изученные 15 слов и т.д. Необходимо промоделировать процесс обучения.

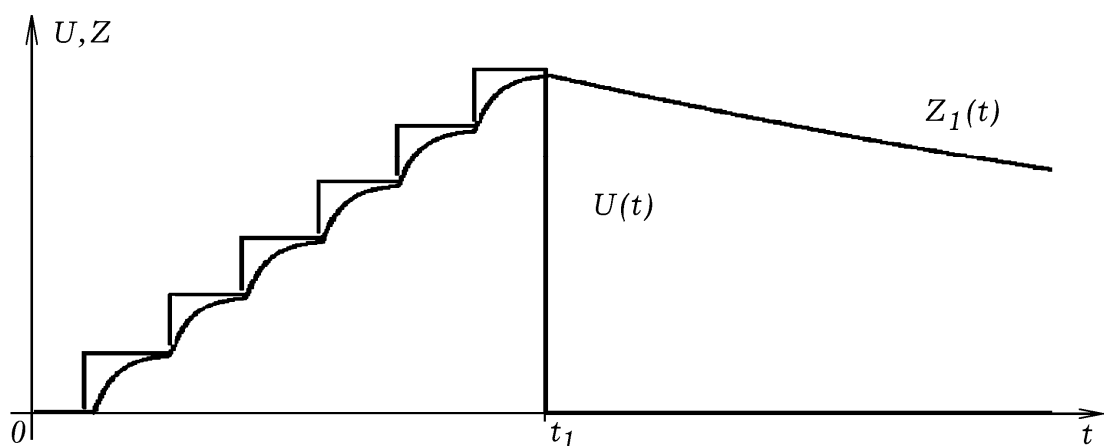


Рис. 4. Уровень требований скачкообразно растет, затем резко падает.

Используется программа ПР-6, результат представлен на рис.4. Понятно, что обучение будет результативным, если уровень требований  $U$  в каждый



момент времени превышает уровень знаний учащегося  $Z$  на величину меньшую  $C$ . После окончания обучения уровень требований снижается до 0, количество знаний учащегося уменьшается по экспоненциальному закону вследствие забывания.

```

uses crt, graph;                                     { ПР-6 }
const a=0.035; g=0.0005; dt=0.01; T1=300; T2=100;
var i,i1,i2,j,DV,MV: integer; M,Z,U,t: real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,450,640,450); U:=0.2;
Repeat t:=t+dt; {U:=U+0.005*dt;} U:=1.9;
If t>T2 then U:=3.8; if t>2*T2 then U:=5.6;
If t>3*T2 then U:=7.4; if t>4*T2 then U:=9.2;
If t>5*T2 then U:=11; if t>6*T2 then U:=0;
If (U>Z)and(U-Z<2) then M:=U-Z else M:=0;
Z:=Z+a*M*dt-g*Z*dt;
circle(10+round(t/3),450-round(20*Z),1);
circle(10+round(t/3),450-round(20*U),1);
until KeyPressed; Readkey; CloseGraph;
END.

```

**Задача 7.** Два учащихся с различными коэффициентами научения  $\alpha_1 = 0,05$  и  $\alpha_2 = 0,03$  изучают некоторый курс. Уровень требований растёт по закону  $U = 0,0002t^2$ . Как изменяется уровень знаний учащихся?

Используется программа ПР-7, результаты моделирования — на рис. 5.1. Сначала оба учащихся отвечают требованиям учителя (интервал  $[0; t_1]$ ). Уровень требований растёт все быстрее и быстрее, поэтому в момент  $t_1$  учащийся 2 с низким  $\alpha$  перестаёт прикладывать усилия, в то время как учащийся 1 продолжает соответствовать требованиям учителя. В момент  $t_2$  учитель “отрывается” от обоих учеников, предъявляет слишком высокие требования, и учащиеся перестают учиться. Учитель, заметив снижение мотивации у учащихся, должен принять меры и снизить уровень требований  $U$ .

```

uses crt, graph;                                     { ПР-7 }
const a1=0.05; a=0.03; g=0.0005; dt=0.01; T1=300;
var i,i1,i2,j,DV,MV : integer; M,t,dZ,Z,U,Z1,M1: real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,450,640,450); U:=0.2;
Repeat t:=t+dt; {U:=U+0.005*dt;}
If t<2*T1 then U:=0.0002*t*t;
{If t>T1 then U:=0.00007*T1*T1+0.0001*sqr(t-T1);}
If U-Z<2.5 then M:=U-Z else M:=0;
If U-Z1<2.5 then M1:=U-Z1 else M1:=0;
Z:=Z+a*M*dt-g*Z*dt; Z1:=Z1+a1*M1*dt-g*Z1*dt;
circle(10+round(t/1),450-round(20*Z),1);
circle(10+round(t/1),450-round(20*Z1),1);
circle(10+round(t/1),450-round(20*U),1);
until KeyPressed; ReadKey; CloseGraph;
END.

```

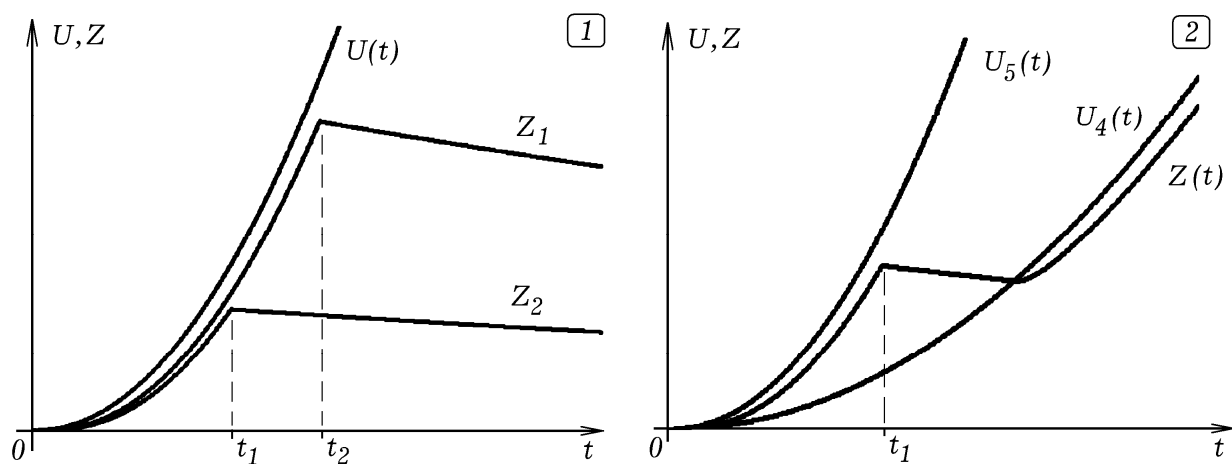


Рис. 5. Уровень требований учителя плавно увеличивается.

**Задача 8.** Уровни требований учителя, соответствующие оценкам 5 и 4, растут по заданным законам  $U_4$  и  $U_5$ . Учащийся имеет коэффициенты научения  $\alpha$  забывания  $\gamma$ . Сначала учащийся претендует на оценку 5, но, если не “успевает” за требованиями учителя, то он снижает уровень своих притязаний до оценки 4. Необходимо промоделировать этот процесс.

Задача решается аналогично, результаты моделирования — на рис. 5.2.

#### Литература

1. Леонтьев Л.П., Гохман О.Г. Проблемы управления учебным процессом: Математические модели. — Рига, 1984. — 239 с.