

**V. V. MAYER, R. V. MAYER**

## **EXPERIMENTAL RESEARCH OF SOUND DISPERSION**

Glazov State Pedagogical Institute, 427600, Glazov, Pervomayskaya, 25

An educational practical physics laboratory work has been suggested on the experimental study of sound dispersion. A dispersion medium is the layer of air before the openings of acoustic resonators. Students get the opportunity to research the wave dispersion in an artificial medium with the standard equipment.

---

## **В. В. МАЙЕР, Р. В. МАЙЕР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ЗВУКА**

*Предложена лабораторная работа физического практикума по экспериментальному изучению дисперсии звука. Диспергирующей средой является слой воздуха перед отверстиями установленных в плоскости акустических резонаторов. Учащиеся получают возможность на стандартном оборудовании исследовать дисперсию волн в искусственной среде.*

Явление дисперсии волн состоит в зависимости скорости распространения волны от частоты. В курсе общей физики изучается классическая теория дисперсии света с упрощенным выводом формулы Зельмейера [1]. Однако это изучение в значительной мере носит догматический характер, так как опирается на классическую модель атома с электронными осцилляторами, которая сама нуждается в экспериментальном обосновании, а демонстрационный и лабораторный эксперименты по получению дисперсионной кривой в окрестности линии поглощения, которые могли бы явиться этим обоснованием, из-за их сложности обычно не ставятся.

Отмеченные недостатки можно устранить, если сначала в механике экспериментально исследовать дисперсию звуковой волны в искусственной резонирующей среде, а впоследствии, изучая дисперсию света в оптике, опираться на акустическую модель. Задача заключается в том, чтобы дать элементарную теорию дисперсии звука и доступный учебный эксперимент. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа, которая опирается на исследования А. Шустера [2] и Н. П. Кастерина [3].

**1. ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЯ.** Пусть в однородной среде плотностью  $\rho$  с модулем упругости  $E$  в направлении оси  $x$  распространяется упругая волна смещений  $\xi$ . Выделим вдоль направления распространения волнового возмущения элемент среды объемом  $V$  в виде цилиндра площадью основания  $S$  и длиной  $\Delta x$  (рис.1).

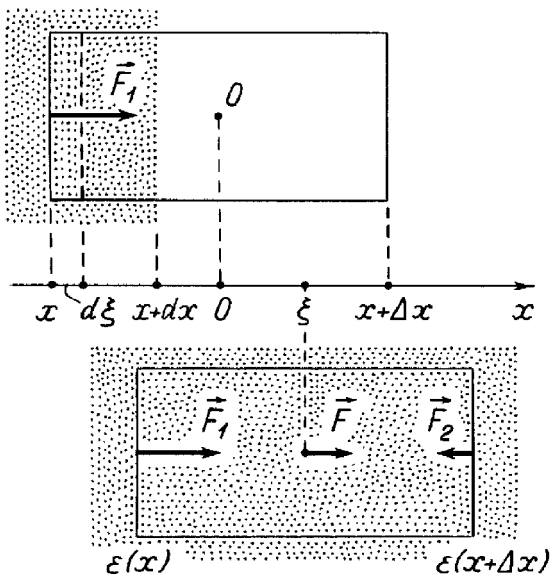


Рис. 1

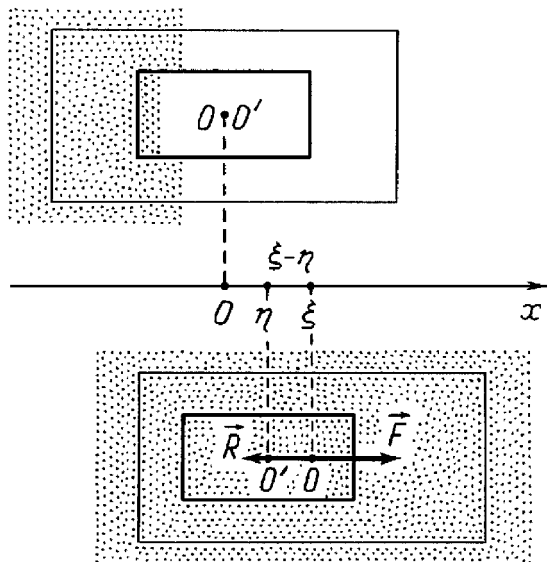


Рис. 2

Когда левый торец этого элемента смещается на  $d\xi$ , возмущение проходит путь  $dx$ , поэтому относительная деформация среды  $\varepsilon = d\xi/dx$ . По закону Гука на выделенный элемент со стороны среды действуют силы:  $F_1 = ES\varepsilon(x)$ ,  $F_2 = ES\varepsilon(x + \Delta x)$ . По второму закону Ньютона произведение массы  $m$  элемента среды на его ускорение  $d^2\xi/dt^2$  равно действующей на него силе  $F = F_1 - F_2$ :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = ES(\varepsilon(x) - \varepsilon(x + \Delta x)) = ES\Delta\varepsilon(x).$$

Так как  $m = \rho S\Delta x = \rho V$ , а  $\Delta\varepsilon(x) = (d\varepsilon/dx) \cdot \Delta x$ , то  $\rho V \cdot d^2\xi/dt^2 = EV \cdot d\varepsilon/dx$ . Отсюда, учитывая, что  $\varepsilon = d\xi/dx$ , получаем

$$\rho V \frac{d^2\xi}{dt^2} = EV \frac{d^2\xi}{dx^2}. \quad (1)$$

Это волновое уравнение, которое принято записывать в виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость упругой волны в однородной среде, которая, как это видно из полученного уравнения, определяется исключительно параметрами среды и не зависит от частоты. Иными словами, в однородной среде дисперсия упругой волны отсутствует. Если в такой среде распространяется гармоническая волна вида  $\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx)$ , то ее фазовая скорость связана с частотой и волновым числом соотношением:  $v = \omega/k$ .

Представим, что в среде находится тело массой  $m_0$  и объемом  $V_0$ , то есть плотностью  $\rho_0 = m_0/V_0$ , которое упруго связано со средой. При распространении возмущения центр масс элемента среды смещается из положения равновесия на некоторую величину  $\xi$ , а рассматриваемого тела — на другую величину  $\eta$ . Относительное смещение между ними составляет  $\xi - \eta$  (рис.2), поэтому на тело действует возвращающая сила, стремящаяся вернуть его в исходное положение относительно элемента среды:  $f = k(\xi - \eta)$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, имеющий физический смысл жесткости упругой связи тела со средой. Если пренебречь трением, то согласно второму закону Ньютона уравнение движения рассматриваемого тела относительно невозмущенной среды имеет вид:

$$m_0 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = k(\xi - \eta), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}. \quad (3)$$

Значит, выведенное из положения равновесия и предоставленное самому себе тело, упруго связанное со средой, без учета потерь энергии совершает незатухающие колебания с собственной частотой  $\omega_0$ . Поэтому такое тело является идеальным осциллятором или резонатором.

Заполним упругую среду множеством одинаковых резонаторов рассмотренного типа. Будем считать, что на каждый резонатор приходится один элемент среды. Обозначим отношение массы общего числа резонаторов к массе всех элементов среды  $C = m_0/m = \rho_0 V_0/\rho V$ . Вместо этого отношения можно использовать понятие концентрации резонаторов в среде  $K = m_0/(m_0 + m) = \rho_0 V_0/(\rho_0 V_0 + \rho V) = C/(1 + C)$ , результат от этого не изменится, но конечное выражение несколько усложнится.

Пусть в среде с резонаторами со скоростью  $v$  распространяется первичная упругая волна частотой  $\omega$ . Тогда каждый резонатор будет совершать вынужденное колебание той же частоты  $\omega$ , испуская вторичные волны. Интерференция вторичных волн от всех резонаторов с первичной волной дает результирующую волну, фазовая скорость  $v'$

которой, вообще говоря, не равна фазовой скорости  $v$  и зависит от частоты. Эта зависимость и называется дисперсией.

Найдем скорость  $v'$  распространения упругой волны в среде с резонаторами. Так как в нашей модели каждому резонатору соответствует один элемент среды, то можно считать, что на элемент среды действуют две силы: одна  $\vec{F}$  со стороны волнового возмущения и другая  $\vec{R}$  со стороны резонатора (рис.2); проекция последней на ось  $x$  равна:  $R = -f = -k(\xi - \eta)$ . Поэтому второй закон Ньютона для элемента среды будет выглядеть так:

$$\rho V \frac{d^2 \xi}{dt^2} = EV \frac{d^2 \xi}{dx^2} - \omega_0^2 \rho_0 V_0 (\xi - \eta). \quad (4)$$

Эта формула отличается от (1) только тем, что в правой части прибавлена сила реакции резонатора, действующая на элемент среды. Тем самым учтена суперпозиция первичной волны, идущей в среде, и вторичных волн, излучаемых возбужденными резонаторами.

Таким образом, распространение упругого возмущения в среде с резонаторами подчиняется волновому уравнению

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} - \omega_0^2 C (\xi - \eta). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь распространение гармонической волны с частотой  $\omega$ , волновое число  $k' = 2\pi/\lambda'$  которой, вообще говоря, отличается от волнового числа гармонической волны в однородной среде:  $\xi = \xi_m \cos(\omega t - k'x)$ , где  $v' = \omega/k'$  — фазовая скорость волны в среде с резонаторами. При этом и элемент среды, и резонатор совершают вынужденные колебания с той же частотой  $\omega$ , но с некоторым сдвигом фаз  $\alpha$ , поэтому смещение резонатора относительно неподвижной среды в точке с координатой  $x$  описывается уравнением  $\eta = \eta_m \cos(\omega t - k'x + \alpha)$ . Дважды дифференцируя  $\xi$  и  $\eta$  по времени и координате, получаем:  $d^2 \xi / dt^2 = -\omega^2 \xi$ ,  $d^2 \eta / dt^2 = -\omega^2 \eta$ ,  $d^2 \xi / dx^2 = -k'^2 \xi$ . Подставляя эти значения в уравнения (3) и (5), имеем:

$$\omega^2 \eta = -\omega_0^2 (\xi - \eta), \quad \omega^2 \xi = v^2 k'^2 \xi + \omega_0^2 C (\xi - \eta).$$

Подставляя во второе уравнение вместо разности  $(\xi - \eta)$  ее выражение из первого, получаем:  $\omega^2 \xi = v^2 k'^2 \xi - C \omega^2 \eta$ . Разделив это выражение на  $k'^2 \xi$  и учитывая, что из первого уравнения  $\eta/\xi = \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$ ,

имеем:  $\omega^2/k'^2 = v^2 - C\omega_0^2\omega^2/k'^2(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Отсюда находим квадрат скорости распространения волны в среде с резонаторами

$$v'^2 = \frac{\omega^2}{k'^2} = \frac{v^2}{1 + C\omega_0^2/(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Считая второе слагаемое в знаменателе малым по сравнению с единицей, по приближенной формуле  $1/\sqrt{1+z} = 1 - z/2$  для малых  $z$  окончательно получаем, что фазовая скорость волны в среде с идеальными резонаторами

$$v' = v \left( 1 - \frac{C}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (6)$$

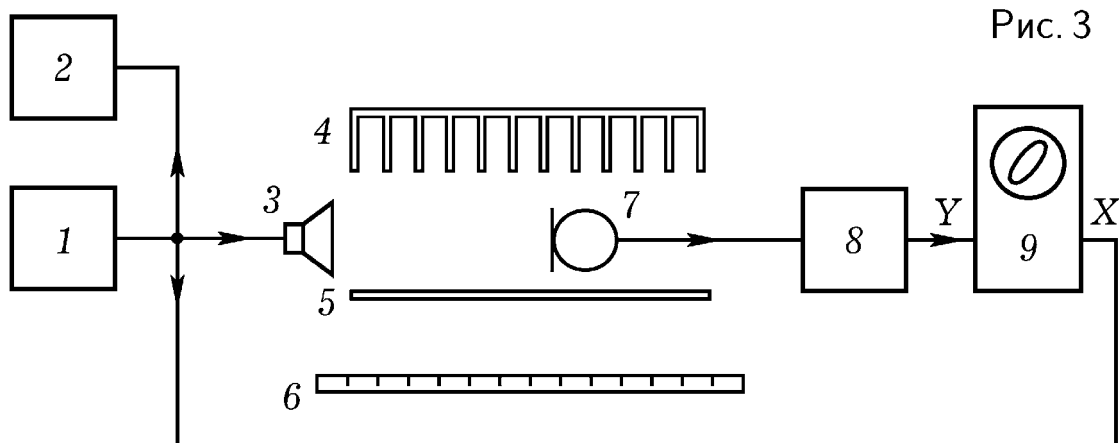
Таким образом, в среде с резонаторами фазовая скорость волны зависит от частоты, то есть имеет место явление дисперсии. Если частота волны сильно отличается от собственной частоты резонаторов, то вторым членом в скобках (6) по сравнению с единицей можно пренебречь, и фазовая скорость волны в среде с резонаторами практически не отличается от ее значения в однородной среде. При  $\omega < \omega_0$  фазовая скорость волны в среде с резонаторами меньше, а при  $\omega > \omega_0$  — больше, чем в однородной среде.

Разрыв скорости при резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  физического смысла не имеет и объясняется тем, что идеальные резонаторы совершают колебания без потерь энергии. Учет этих потерь дает для скорости выражение, ни при каких значениях частоты не обращающееся в бесконечность. Понятно, что одновременно с дисперсией при частотах, близких к резонансной, наблюдается поглощение волны, так как растет амплитуда колебаний резонаторов и увеличиваются необратимые потери энергии.

**2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.** Искусственная среда с дисперсией может представлять собой слой воздуха перед отверстиями расположенных в одной плоскости резонаторов Гельмгольца [3], а фазовую скорость звуковой волны можно измерить, например, методом фигур Лиссажу [4]. Этими соображениями определяется один из возможных вариантов экспериментальной установки [5] (рис.3).

Выход генератора звуковой частоты 1 соединен с частотомером 2 и динамиком 3. Излучаемая динамиком гармоническая звуковая волна распространяется в искусственной среде, заключенной в области между резонаторами 4 и установленной параллельно их отверстиям

плоской пластиной 5. Линейка 6 предназначена для измерения координаты микрофона 7, который можно перемещать в искусственной среде. Микрофон через усилитель 8 или непосредственно соединен со входом Y осциллографа 9. Вход X этого осциллографа соединен с выходом генератора 1.



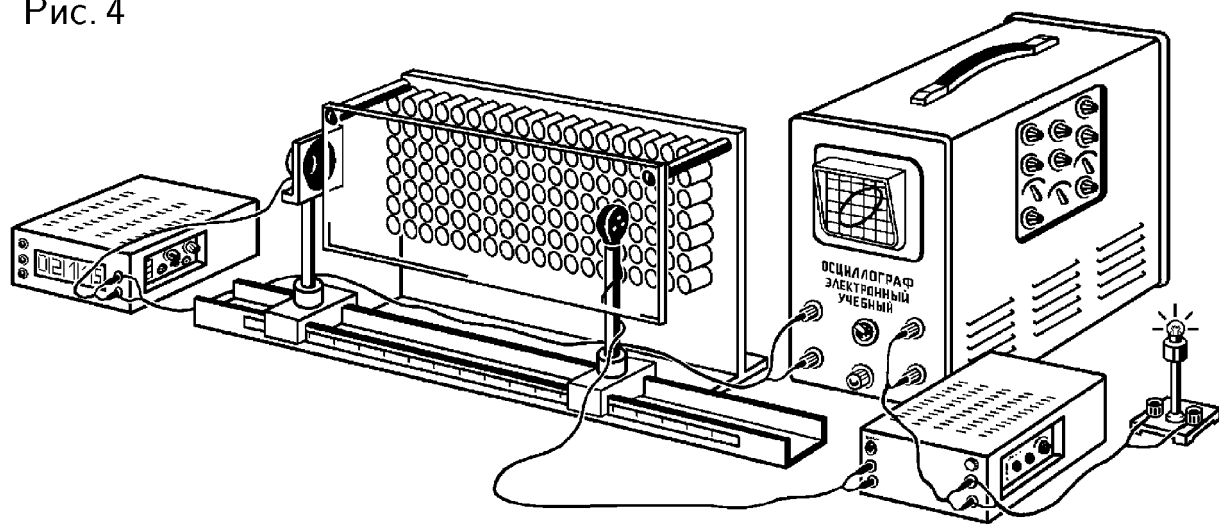
Таким образом, на осциллограф одновременно поступают исследуемый сигнал с микрофона и опорный непосредственно с генератора. В результате светлое пятно на экране электронно-лучевой трубки, участвуя в двух когерентных взаимно перпендикулярных колебаниях, описывает в общем случае эллипс. При изменении расстояния от динамика до микрофона непрерывно изменяется фаза только принимаемого сигнала, а фаза опорного остается постоянной. Поэтому эллипс на экране изменяет свою конфигурацию, дважды за пространственный период волны вырождаясь в отрезок. Минимальное расстояние между двумя положениями микрофона, при которых на экране наблюдаются одинаково ориентированные отрезки, очевидно, дает длину звуковой волны в искусственной среде  $\lambda'$ . Зная частоту генератора и длину волны, определяют скорость звука в искусственной среде.

Система резонаторов образована 455 трубочками длиной  $l = 25$  мм и внутренним диаметром  $d = 10$  мм, которые склеены из полосок писчей бумаги длиной  $\sim 160$  мм на круглой оправке клеем ПВА. Трубочки одним торцом приклеены к плоской пластине так, что заполняют прямоугольник размером  $150 \times 400$  мм. На расстоянии 40 мм от их открытых концов закреплен плоский экран из оргстекла или другого твердого материала. Искусственной средой является слой воздуха между отверстиями резонаторов и этим экраном. Фактически экран играет вспомогательную роль, предотвращая влияние волн, отраженных от окружающих предметов, на звуковое поле в рабочем объеме.

Собственная частота цилиндрического резонатора может быть оценена грубой прикидкой: внутри него укладывается примерно четверть длины звуковой волны в воздухе. Более точный расчет выполняют по приближенной формуле [6], учитывающей влияние открытого конца цилиндрического резонатора:  $\nu = c/\lambda = c/4(l + 0,4d)$ , где  $c = 340$  м/с — скорость звука в воздухе при  $20^\circ$  С. Расчет и измерения показывают, что рекомендованные резонаторы имеют собственную частоту  $\sim 3$  кГц.

В установке можно использовать любые современные физические приборы. С целью обеспечения максимальной доступности мы опробовали приборы школьного типа (рис.4): генератор ГНЧШ–1 с цифровой индикацией частоты, динамик 2ГД–40, микрофон ДЭМШ–1, усилитель УНЧШ–1, нагруженный на лампочку накаливания 6,3 В (0,3 А), и осциллограф ОЭУ. Чтобы появилась возможность применения слабо слышимого звука, не мешающего проведению других работ в лаборатории, и эллипс получался во весь экран осциллографа, в этой установке целесообразно исследуемый сигнал после усиления подать на вход X, а опорный — непосредственно на вход Y осциллографа.

Рис. 4



**3. ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.** В лабораторной работе требуется доказать существование дисперсии и поглощения звука в искусственной среде, а также снять дисперсионную кривую.

1. *Изучение зависимости длины волны от частоты в недиспергирующей среде.* Из установки убирают систему резонаторов. Микрофон устанавливают в такую точку  $x_0$ , чтобы эллипс на экране осциллографа выродился в наклонный отрезок, проходящий через первый и

третий квадранты; в этом случае сдвиг фаз между сигналами равен нулю. Далее микрофон перемещают в ближайшую точку  $x_1$ , в которой эллипс на экране снова вырождается в проходящий через те же квадранты отрезок. При этом сдвиг фаз составляет  $2\pi$ , а перемещение  $x_1 - x_0$  равно длине волны звука в воздухе  $\lambda$ . Для уменьшения погрешности измерений микрофон перемещают не на одну, а на  $n$  длин волн, в точку с координатой  $x_n$ . Тогда длина звуковой волны в воздухе определяется по формуле:  $\lambda = (x_n - x_0)/n$ , а ее фазовая скорость —  $v = \lambda\nu$ , где  $\nu$  — частота звука.

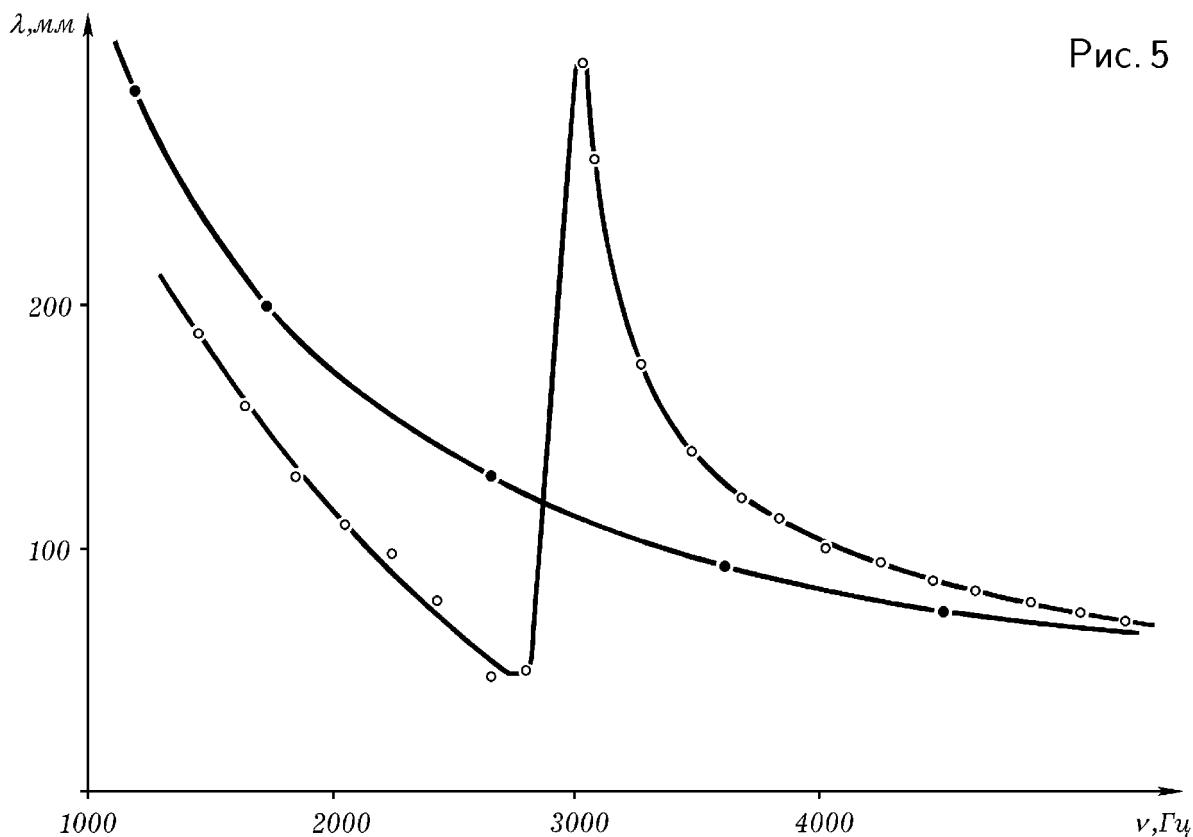


Рис. 5

Изменяя частоту звука от 1 до 5 кГц через 0,2 кГц, описанным способом получают зависимость длины звуковой волны в воздухе от частоты и строят ее график 1 (рис.5). Для каждого значения частоты вычисляют скорость звука в воздухе, и отобразив ее на графике 1 (рис.6), убеждаются в отсутствии дисперсии звука в воздухе.

2. *Изучение зависимости фазовой скорости волны от частоты в диспергирующей среде.* В установку вводят систему резонаторов и повторяют измерения скорости звука, как описано выше. Особенно тщательно снимают данные вблизи резонансной частоты системы. Наблюдая за свечением лампочки накаливания, подключенной к выходу



усилителя исследуемого сигнала, убеждаются, что дисперсия звуковой волны в искусственной среде имеет место вблизи полосы поглощения звука этой средой. По полученным данным в прежних системах координат строят графики 2 зависимостей длины волны (рис.5) и скорости звука (рис.6) от частоты. Качественно подтверждают справедливость формулы (6).

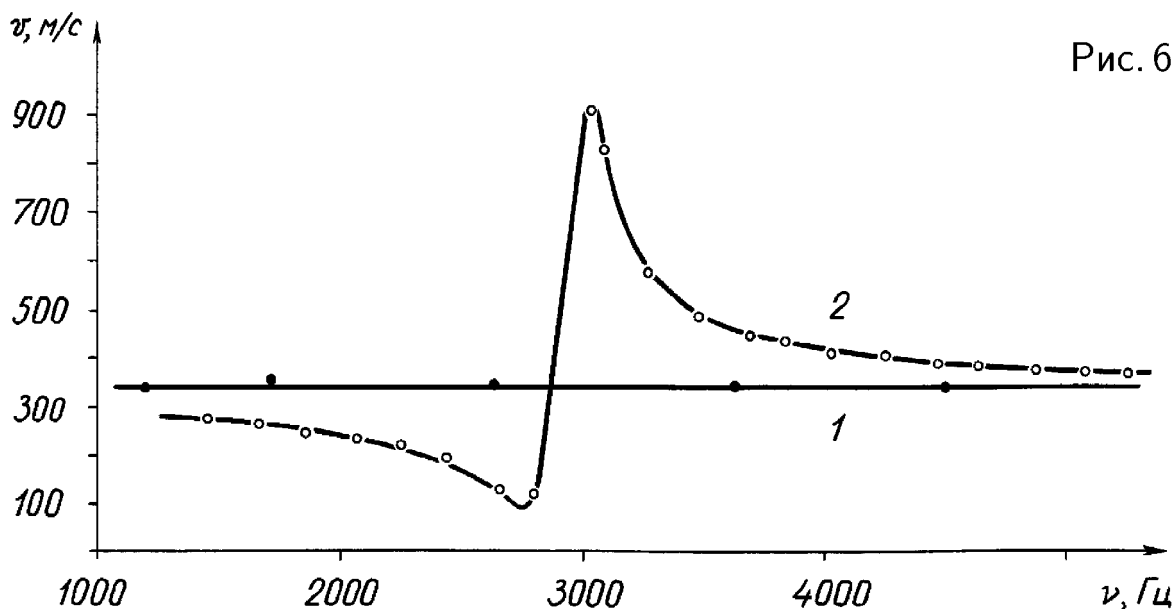


Рис. 6

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Т. 4. Оптика.— М.: Наука, 1985.— С. 517–528.
2. Шустер А. Введение в теоретическую оптику.— Л.–М.: ОНТИ, 1935.— С. 254–288.
3. Кастерин Н.П. О распространении волн в неоднородной среде. Ч.1. Звуковые волны. — М.: 1904. — 149 с.
4. Специальный физический практикум. Часть 1 / Под ред. А. А. Харламова.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.— С. 247–248.
5. Майер В.В., Майер Р.В. Прибор для изучения дисперсии звуковых волн: Патент N 2051421 С1, МКИ G 09 В 23/06.— N 93045436/12; заявл. 08.09.93; опубл. 27.12.95 Бюл. N 36.
6. Горелик Г.С. Колебания и волны.— М.: Физматгиз, 1959.— С. 214–217.

Майер В. В., Майер Р. В. Экспериментальное изучение дисперсии звука. — Преподавание физики в высшей школе.— 1996.— №7.— С. 69–78.