

Майер Р.В.
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА:
АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ

Изучение численных методов и основ компьютерного моделирования предполагает решение задач вычислительной физики различного уровня сложности. Особый интерес в этом смысле представляет собой моделирование различных течений вязкой жидкости, требующее численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных на ЭВМ. Классическим примером является двумерная задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости (каверне) с движущейся крышкой, а также задачи о конвекции в полости при подогреве сбоку и снизу. В статье рассмотрена теория перечисленных явлений и предложены учебные варианты компьютерных программ, которые можно использовать на домашнем персональном компьютере.

1. Вихревое течение вязкой жидкости. Сформулируем проблему: Вязкая несжимаемая жидкость целиком заполняет двумерную прямоугольную полость, накрытую сверху твердой пластиной, движущейся с постоянной скоростью V (рис.1). Стенки полости непроницаемы. Необходимо рассчитать поле скоростей течения жидкости.

Из уравнений Навье–Стокса для плоского течения несжимаемой вязкой жидкости следует:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Введем функцию тока $\psi(x, y, t)$ такую, что: $v_x = \partial\psi / \partial y$, $v_y = -\partial\psi / \partial x$ и вихрь скорости ω . Течение двумерное, вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости рис. 1 и равен:

$$\omega = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Учтем, что $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$. Если первое уравнение из системы Навье–Стокса продифференцировать по ∂y , второе по ∂x , а затем уравнения вычесть, то получится:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right).$$

Эти два уравнения и составляют систему “функция тока – вихрь скорости”.

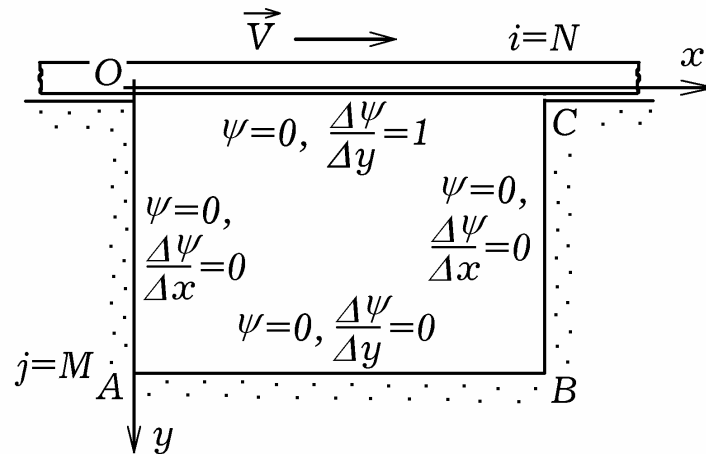


Рис. 1. Расчет течения жидкости в камере с подвижной крышкой.

Расчетную область покроем двумерной сеткой и запишем уравнения в конечных разностях:

$$\Psi_{i,j} = (\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i,j+1} - \omega_{i,j}h) / 4,$$

$$v_{xi,j} = (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) / 2h, \quad v_{yi,j} = -(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) / 2h,$$

$$\omega_{i,j}^{t+1} = \omega_{i,j}^t + v_{xi,j}^t \frac{\omega_{i+1,j}^t - \omega_{i-1,j}^t}{2h} \Delta \tau + v_{yi,j}^t \frac{\omega_{i,j+1}^t - \omega_{i,j-1}^t}{2h} \Delta \tau + \nu \frac{\omega_{i-1,j}^t + \omega_{i+1,j}^t + \omega_{i,j-1}^t + \omega_{i,j+1}^t - 4\omega_{i,j}^t}{h^2} \Delta \tau.$$

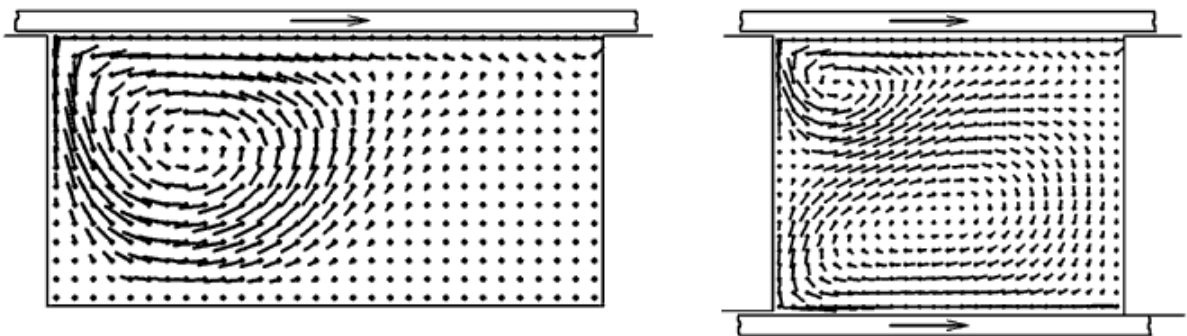


Рис.2. Поле скоростей в камере с движущимися дном и крышкой.

Результат расчета поля скоростей зависит от граничных условий, которые задаются так (рис. 1): 1) на левой границе OA $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial x = 0$, вихрь скорости $\omega_{1,j} = 2\psi_{2,j}/h^2$; 2) на нижней границе AB $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$, вихрь скорости $\omega_{i,M} = 2\psi_{i,M-1}/h^2$; 3) на правой границе BC $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial x = 0$, вихрь скорости $\omega_{N,j} = 2\psi_{N-1,j}/h^2$; 4) на верхней границе CO $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial y = 1$, вихрь $\omega_{i1} = 2\psi_{i,2}/h^2 - 2V/h$.

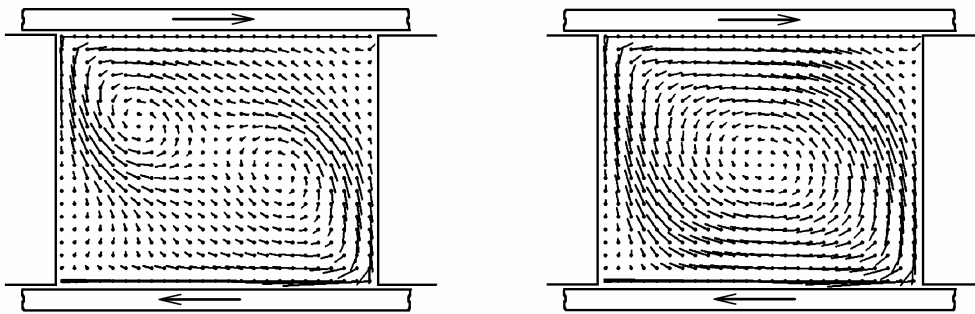


Рис. 3. Крышка и дно движутся в противоположные стороны.

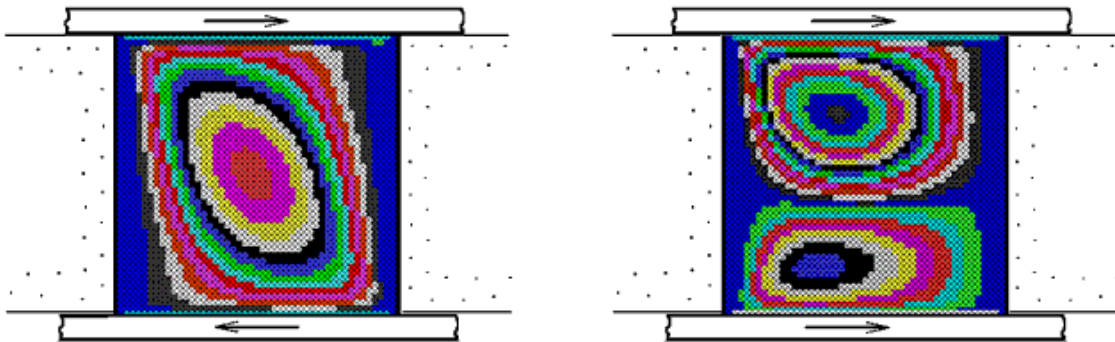


Рис. 4. Течение жидкости в камере с подвижными дном и крышкой.

Компьютерная модель позволяет, исходя из заданных размеров камеры, скоростей крышки и дна, вязкости жидкости, рассчитать поле скоростей (рис. 2 и 3). Хорошо видно, что когда скорости крышки и дна направлены противоположно, сначала образуются два вихря, закрученных в одном направлении, а затем они через некоторое время объединяются в один. В случае, когда крышка и дно движутся в одном направлении, возникают два противоположно направленных вихря. На рис. 4 показано распределение функции тока, когда крышка и дно движутся с разными скоростями. На экране монитора получается цветное изображение, границы разноцветных областей соответствуют линиям тока. Для получения стационарного решения необходимо, чтобы программа выполнила более 1500 итераций. Изображение на экране обновляется через

200 итераций. Результаты численного моделирования вихревого течения жидкости в кавернах различных форм с подвижной крышкой представлены на рис. 5.

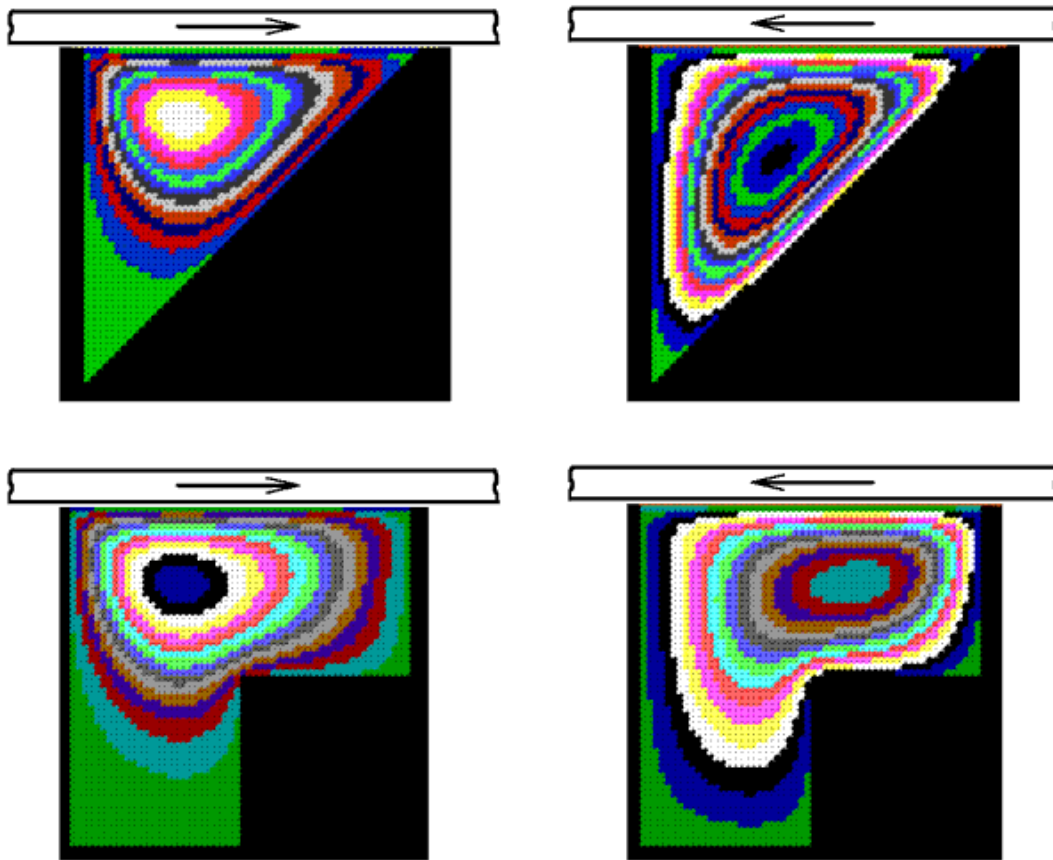


Рис. 5. Течение жидкости в треугольной каверне и каверне с выступом.

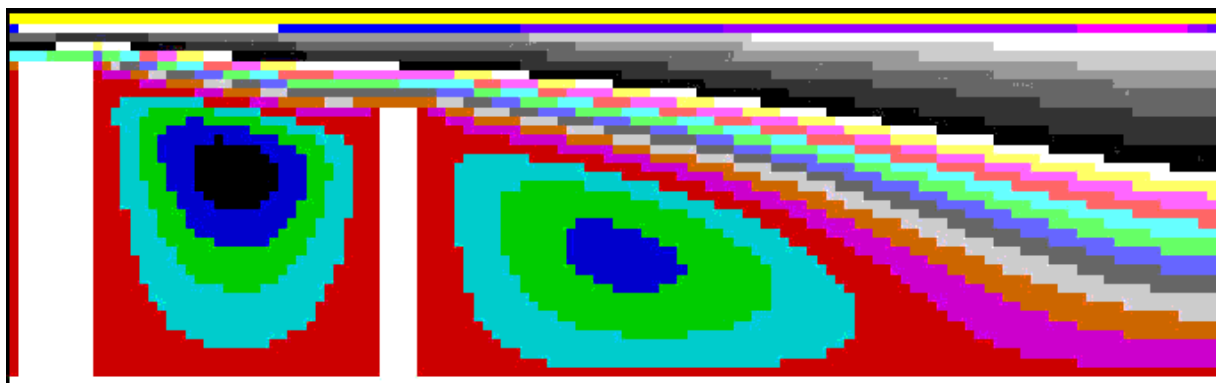


Рис. 6. Вихревое течение жидкости за препятствием и в каверне.

Ниже приведен вариант программы для расчета течения жидкости за препятствием и в каверне без крышки, написанной на Free Pascal. В ней моделируется образование вихрей при обтекании вязкой жидкостью одного и двух препятствий (рис. 6). Как заданы граничные условия, ясно из процедуры Gr_usl. Рассмотренный метод позволяет решить и другие

задачи: 1) расчет поля скоростей в прямоугольной каверне с движущимися дном и крышкой (рис. 2); 2) расчет течения жидкости в каверне с различными профилями (рис. 5); 3) образование вихрей за пластиной, на которую набегаёт поток жидкости и т.д. В последнем случае течение жидкости симметрично относительно горизонтальной плоскости, и поэтому достаточно решить задачу для верхней полуплоскости.

```

Uses crt, graph; Const n=80; m=40; dt=0.05; h=1; nu=2.0;
      a=4; b=10; c=5; a1=40; b1=45; c1=10;
Var i,j,k,DV,MV,EC:integer;
      psi,w:array[0..N+1,0..M+1] of real;
Procedure Gr_usl;
begin For j:=0 to M+1 do For i:=0 to N+1 do begin
psi[0,j]:=psi[1,j]; psi[N+1,j]:=psi[N,j];
psi[i,0]:=0; psi[i,1]:=20; psi[i,M]:=0;
If (i>a)and(i<b)and(j>c) then psi[i,j]:=0;
If j>c then begin w[a,j]:=2*psi[a-1,j]/h/h;
w[b,j]:=2*psi[b+1,j]/h/h; end;
If (i>a)and(i<b) then w[i,c]:=2*psi[c,j-1]/h/h;
If (i>a1)and(i<b1)and(j>c1) then psi[i,j]:=0;
If j>c1 then begin w[a1,j]:=2*psi[a1-1,j]/h/h;
w[b1,j]:=2*psi[b1+1,j]/h/h; end;
If (i>a1)and(i<b1) then w[i,c1]:=2*psi[c1,j-1]/h/h;
w[0,j]:=0; w[N+1,j]:=0; w[i,M+1]:=0; w[i,0]:=0; end; end;
Procedure Ur1;
begin psi[i,j]:=(psi[i-1,j]+psi[i+1,j]+
psi[i,j-1]+psi[i,j+1]-w[i,j]*h*h)/4; end;
Procedure Ur2;
begin w[i,j]:=w[i,j]+(psi[i,j+1]-psi[i,j-1])*(w[i+1,j]-
w[i-1,j])*dt/4/h+(-psi[i+1,j]+psi[i-1,j])*(w[i,j+1]-
w[i,j-1])*dt/4/h+nu*(w[i-1,j]-4*w[i,j]+w[i+1,j]+
w[i,j-1]+w[i,j+1])/h/h*dt; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
Repeat Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur1;
Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur2;
Gr_usl; For i:=N downto 1 do For j:=M downto 1 do Ur1;
Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur2;
inc(k); If k mod 200=0 then begin cleardevice;
For i:=1 to N do For j:=1 to M do begin
setcolor(round(psi[i,j]*2)+4);
If psi[i,j]=0 then setcolor(15);
rectangle(i*6+10,j*6,i*6+15,j*6+5);
rectangle(i*6+12,j*6+2,i*6+13,j*6+3); end; end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

2. Конвективное движение вязкой жидкости. Допустим, в поле тяжести имеется полость, наполненная жидкостью, и создана разность температур между различными стенками полости, либо внутри нее находится источник тепла или холода. Возникает конвекция — перенос

теплоты потоками вещества. Она обусловлена тем, что нагретые слои жидкости имеют меньшую плотность и поднимаются вверх, а холодные — опускаются вниз. Найдем распределение скорости и температуры жидкости, устанавливающееся в результате ее конвективного движения и теплообмена.

```

Uses crt, graph; const N=130; M=40; dt=0.0005; h=1; nu=2;
Var i,j,k,DV,MV,EC:integer;
    psi,w,T:array[0..N+1,0..M+1] of real;
Procedure Gr_usl;
begin For i:=0 to N+1 do For j:=0 to M+1 do begin
T[i,0]:=0; T[i,M+1]:=10; T[0,j]:=T[1,j]; T[N+1,j]:=T[N,j];
psi[0,j]:=0; psi[N+1,j]:=0; psi[i,0]:=0; psi[i,M+1]:=0;
w[i,M]:=2*psi[i,M]/h/h; w[1,j]:=2*psi[1,j]/h/h;
w[N,j]:=2*psi[N,j]/h/h; w[i,1]:=2*psi[i,1]/h/h;
w[0,j]:=0; w[N+1,j]:=0; w[i,M+1]:=0; w[i,0]:=0; end; end;
Procedure Ur1;
begin psi[i,j]:=(psi[i-1,j]+psi[i+1,j]+
psi[i,j-1]+psi[i,j+1]-w[i,j]*h*h)/4; end;
Procedure Ur2;
begin w[i,j]:=w[i,j]-(psi[i,j+1]-psi[i,j-1])*(w[i+1,j]
-w[i-1,j])*dt/4/h+(psi[i+1,j]-psi[i-1,j])*(w[i,j+1]-
w[i,j-1])*dt/4/h+nu*(w[i-1,j]-4*w[i,j]+w[i+1,j]+
w[i,j-1]+w[i,j+1])/h/h*dt+0.001*(T[i+1,j]-T[i-1,j])); end;
Procedure Ur3;
begin T[i,j]:=T[i,j]+3*(T[i-1,j]-4*T[i,j]+T[i+1,j]+T[i,j-1]+
T[i,j+1])/h/h*dt-(psi[i,j+1]-psi[i,j-1])*(T[i+1,j]-T[i-1,j])
*dt/4/h+(psi[i+1,j]-psi[i-1,j])*(T[i,j+1]-T[i,j-1])*dt/4/h; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
Repeat Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur1;
Gr_usl; For i:=N downto 1 do For j:=M downto 1 do Ur1;
Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur2;
Gr_usl; For i:=N downto 1 do For j:=M downto 1 do Ur2;
Gr_usl; For i:=1 to N do For j:=1 to M do Ur3;
Gr_usl; For i:=N downto 1 do For j:=M downto 1 do Ur3;
inc(k); If k mod 500=0 then begin cleardevice; k:=0;
For i:=1 to N do For j:=1 to M do begin
setcolor(abs(round(psi[i,j]/10))mod 12+2);
circle(i*6,j*6,1); circle(i*6,j*6,2); circle(i*6,j*6,3);
setcolor(abs(round(T[i,j]))mod 12+2);
circle(i*6,j*6+250,2); circle(i*6,j*6+250,3); end; end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Для этого следует совместно решить систему ДУЧП из уравнений Навье–Стокса в переменных “функция тока – вихрь скорости” и уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + G \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{q(x, y)}{\rho c}, \quad \omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

где T — температура, q — мощность источников тепла. Для численного решения этой системы уравнений строят конечно-разностную схему и задают граничные условия для ψ , ω и T . Программа, моделирующая конвективные течения вязкой жидкости в прямоугольной полости при различном распределении температуры стенок и источников тепла, представлена выше.

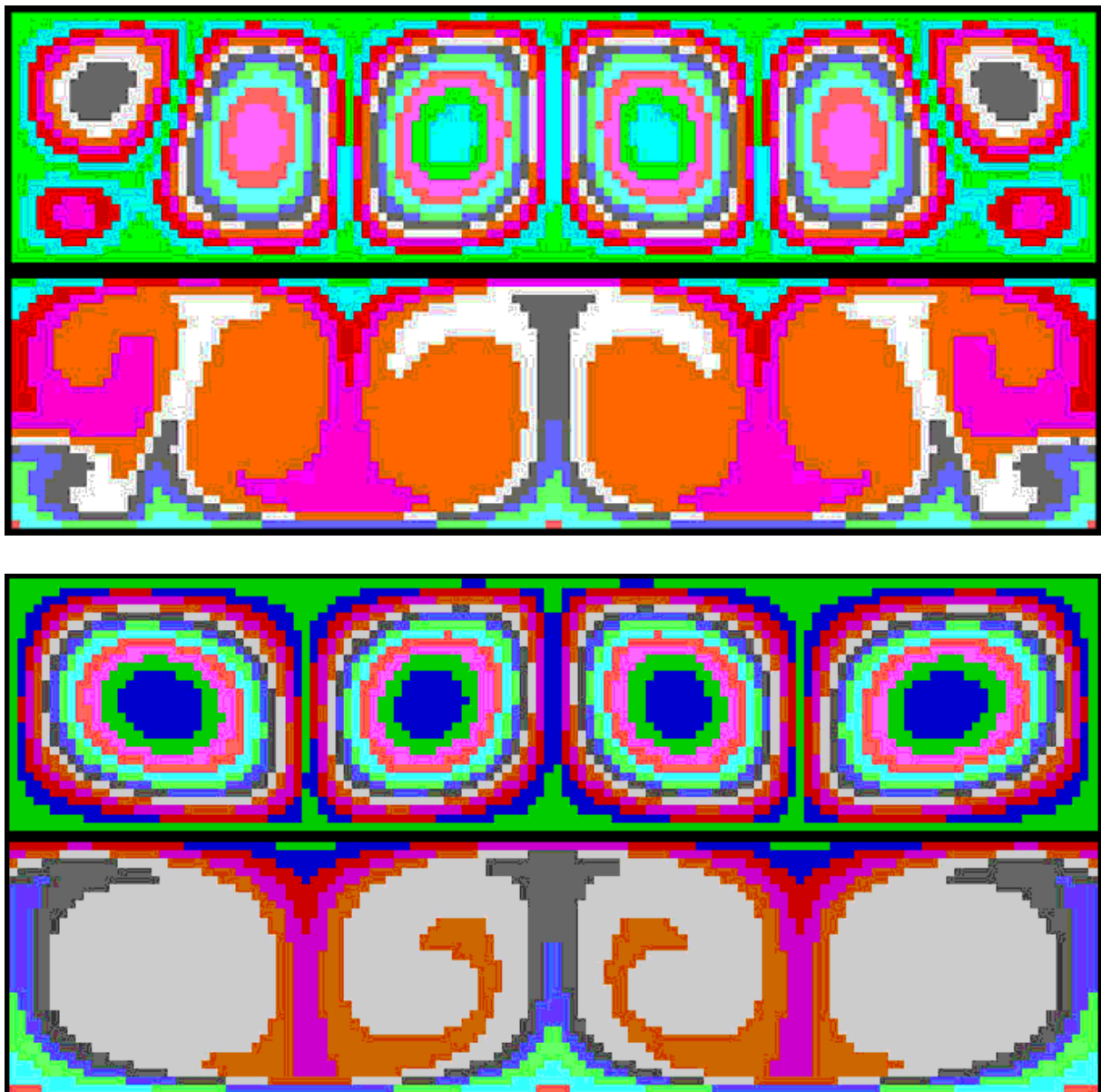


Рис. 7. Моделирование конвекции и образования ячеек Бенара.

Компьютер рассчитывает линии тока жидкости и поле температур в следующих случаях: 1) при подогреве снизу (рис. 7), что приводит к

возникновению ячеек Бенара; 2) при подогреве сбоку (рис.8), а также при подогреве слева и охлаждении справа (рис. 9); 3) при наличии небольшого по размерам источника тепла внутри жидкости (рис. 10 и 11).

Граничные условия заданы в процедуре Gr_usl. Они соответствуют случаю, когда дно сосуда имеет более высокую температуру и в результате конвекции возникают ячейки Бенара. На рис. 7 сверху показано распределение функции тока (границы разноцветных областей — линии тока), а снизу — распределение температуры (границы — изотермы). Созданная компьютерная модель позволяет провести целую серию вычислительных экспериментов, изучая конвекцию при различных вязкости, теплопроводности, плотности жидкости, размерах полости, температурах ее стенок, мощностях и положениях источников тепла (холода). Например, на рис. 8 показан результат расчета поля скоростей (слева) и поля температур (справа) в случае, когда нагревается левая стенка полости. Хорошо видно, что возникает вихревое движение жидкости, более нагретые слои поднимаются по левой стенке вверх, затем вправо и опускаются. Статические черно-белые картинки не позволяют передать красоту моделируемых явлений в полной мере. При запуске программы на экране монитора возникают цветные динамические анимации, формирующие наглядный образ исследуемых явлений и повышающие интерес студентов к изучаемой дисциплине.

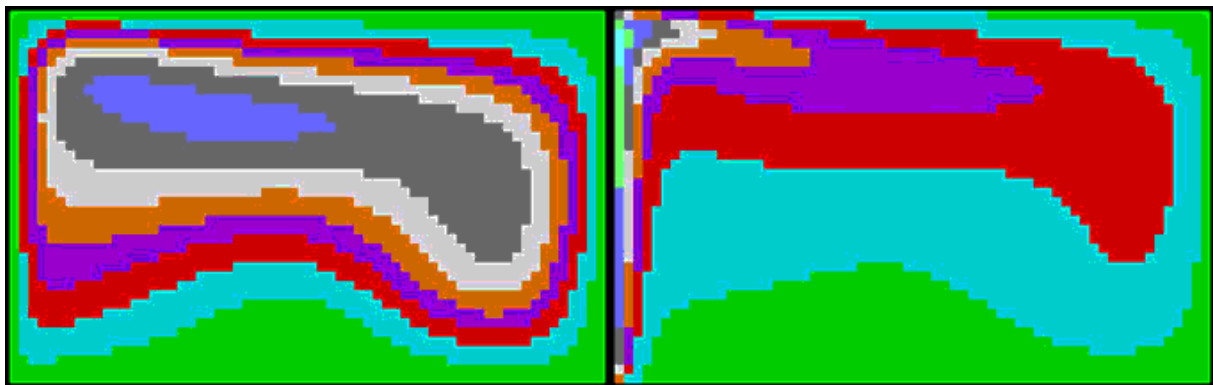


Рис. 8. Результаты моделирования конвекции (подогрев сбоку).

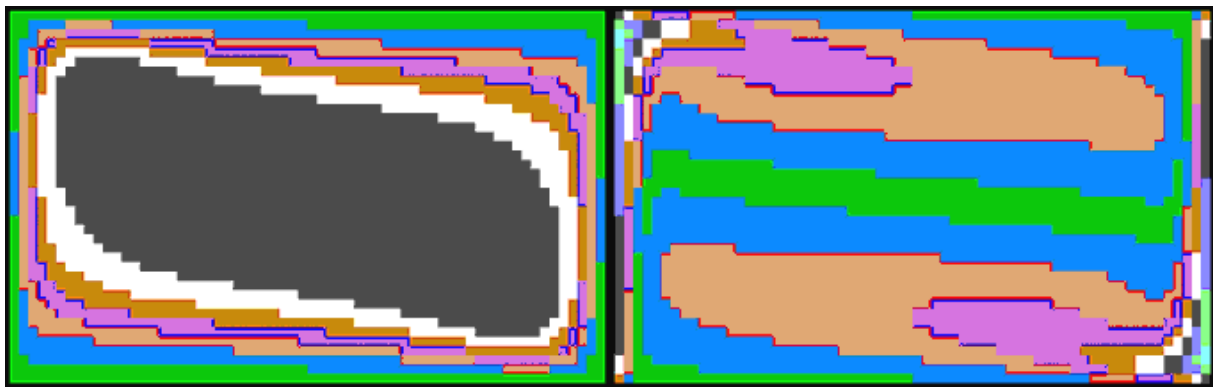


Рис. 9. Левая стенка сосуда нагрета, а правая охлаждена.

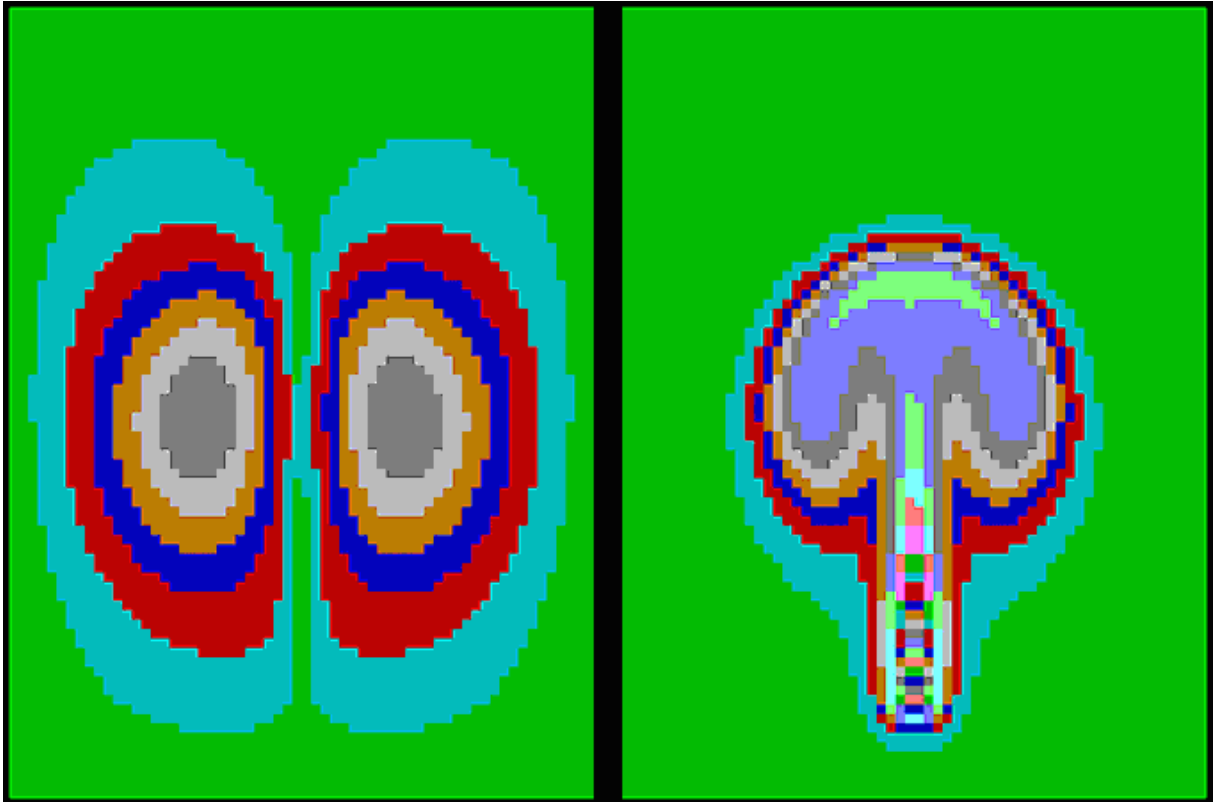


Рис. 10.1. Конвекция от небольшого источника тепла внутри сосуда.

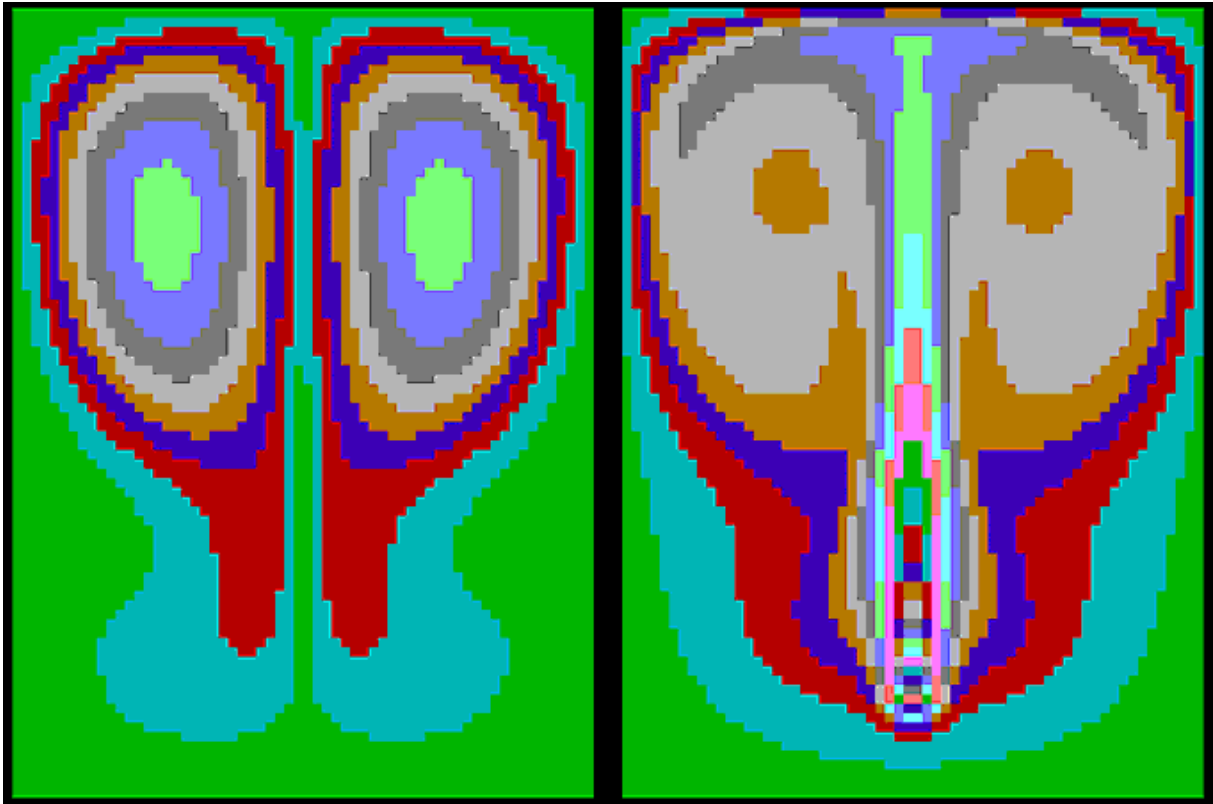


Рис. 10.2. Конвекция от небольшого источника тепла внутри сосуда.

Рис. 9 соответствует ситуации, когда левая стенка полости имеет высокую температуру, а правая — низкую. Возникает циркуляция жидкости: у левой (горячей) стенки она поднимается вверх, затем вправо, а у правой (холодной) стенки — опускается вниз. На рис. 10 моделируется конвективное движение жидкости, когда внутри нее находится точечный источник тепла. Нагретые слои жидкости (газа), поднимаясь вверх, образуют вихрь, похожий на “гриб” атомного взрыва. Если источник тепла смещен в сторону, то течение несимметрично (рис. 11).

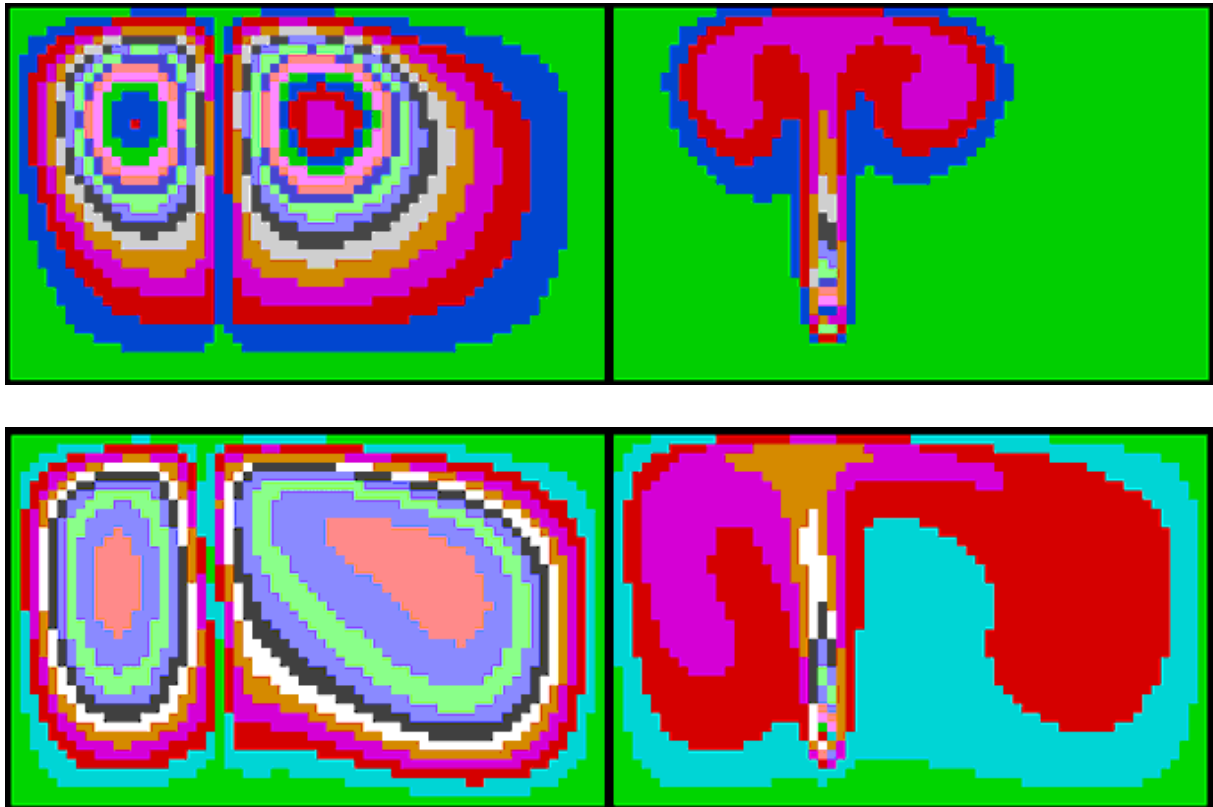


Рис. 11. Конвективное движение жидкости от точечного источника тепла.

Рассмотренные выше компьютерные модели позволяют решить и более простые задачи, например: 1) рассчитать распределение температуры в вязкой жидкости, текущей по трубе, при наличии источника тепла; 2) определить поле скоростей в слое жидкости, ограниченном двумя вертикальными пластинами, которые имеют различные температуры. Анализ этих и других задач, связанных с использованием численных методов для моделирования физических, биологических и иных систем представлен в электронной книге “Задачи, алгоритмы, программы” (<http://komp-model.narod.ru>).

Литература

1. Кунин С. Вычислительная физика. — М.: Мир, 1992. — 518 с.
2. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений. — Глазов, ГГПИ: 2009. — 112 с. (<http://komp-model.narod.ru>, maier-rv.glazov.net)
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.