

Майер Р.В.
КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО
ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СИЛОВОМ ПОЛЕ

“Люблю волчок, забаву детства, его вращения чародейство...” — поется в одной из популярных песен 80–х. Слушая ее, каждый вспоминает, как он в детстве играл с юлой или наблюдал за вращением небольшой шестеренки, опирающейся одним концом на гладкую горизонтальную поверхность. Эта динамичная игрушка не оставляет равнодушными ни детей, ни взрослых. Кроме классических, существуют музыкальные волчки, волчки со специальным механизмом для разгона, волчки с игрушками внутри и т.д. В статье рассматриваются результаты компьютерного моделирования движения волчка в поле тяжести.

1. Как движется волчок

Проблема движения тела вокруг закрепленной точки является одним из сложных вопросов динамики твердого тела. Так как при этом каждая точка тела движется по сферической поверхности, то такое движение называется **сферическим** [1]. Само тело при этом называют **волчком**; различают асимметричный, симметричный и шаровой волчок. Юла, шестеренка, гироскоп (массивный диск, насаженный на стержень), — это примеры симметричного волчка, так как два их главных центральных моментов инерции равны.

Неподвижный волчок ведет себя как обычное твердое тело и под действием внешнего момента сил поворачивается в том же направлении. Если волчок вращается, то происходит гироскопический эффект: при действии на ось вращающего момента \vec{M} , она поворачивается в направлении перпендикулярном к вектору \vec{M} . Вращающийся гироскоп стремится сохранить ориентацию своей оси в пространстве, что используется в гирокомпасах. Эти явления объяснены в любом вузовском учебнике физики [1, 4].

Особый интерес представляет собой движение волчка в однородном силовом поле. Ось гироскопа, нижняя точка которой закреплена, **прецессирует**, поворачиваясь вокруг вертикали и описывая коническую поверхность (рис. 1.1). Так как из-за сил трения скорость вращения уменьшается, то ось волчка спиралеобразно удаляется от вертикали. При этом положение волчка однозначно определяется углом собственного вращения ψ , углом прецессии φ и углом нутации θ . Нам будет удобно угол прецессии φ отсчитывать так, как показано на рис 1.1, а не традиционным образом. Если прецессия нерегулярная, то угол нутации θ колеблется относительно некоторого значения, точка А выписывает сложную кривую, ось гороскопа совершает **нутационные колебания**.

Существующая теория движения волчка довольно сложна и требует решения динамических уравнений Эйлера. Ее можно найти в вузовском курсе теоретической механики, например в книге И.Д.Ландау [1]. В настоящей статье предлагается простой и достаточно оригинальный способ моделирования сфе-

рического движения твердого тела на персональной ЭВМ, требующий знания только школьного (!) курса физики и математики.

1. Основная идея моделирования

Мысленно заменим гироскоп, имеющий форму диска с осью, системой из трех материальных точек, находящихся в вершинах равнобедренного или даже равностороннего треугольника с длиной стороны l_0 и связанных жесткими невесомыми стержнями (рис. 1.2). Можно подобрать массы материальных точек и длины сторон треугольника так, чтобы получившаяся система полностью соответствовала какому-то реальному гироскопу с вполне конкретной массой, моментом инерции и положением центра масс (ЦМ). Точка 3 остается неподвижной, ее координаты не изменяются. Вместо жестких стержней будем рассматривать упругие стержни с большим коэффициентом жесткости k . В этом случае задача сводится к расчету движения двух частиц m_1 и m_2 , связанных между собой упругими стержнями в однородном поле тяжести при заданных начальных условиях.

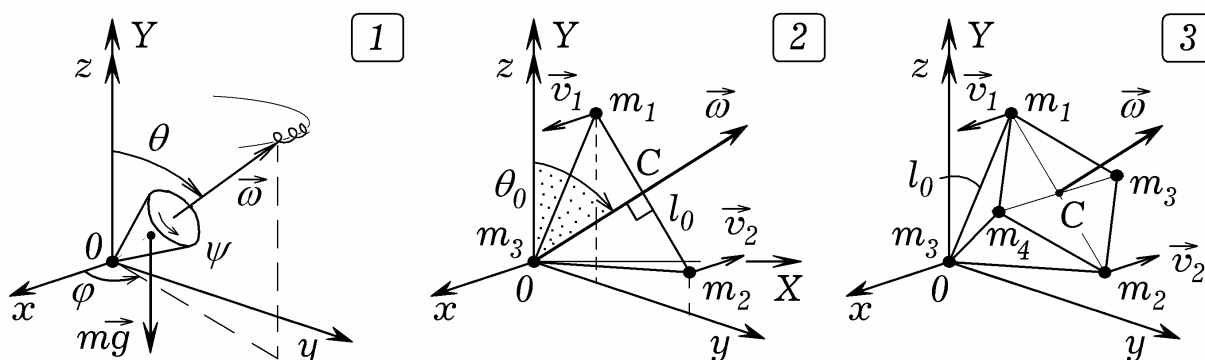


Рис. 1. Моделирование сферического движения твердого тела.

Понятно, что предложенная модель симметрична относительно плоскости, содержащей частицы m_1 , m_2 и m_3 . Для того, чтобы промоделировать сферическое движение произвольного твердого тела, перейдем к модели из пяти частиц, находящихся в узлах правильной четырехугольной пирамиды (рис. 1.2). В общем случае частиц должны иметь различные массы.

2. Математическая модель

Рассмотрим симметричную систему из трех материальных точек m_1 , m_2 , m_3 , связанных между собой упругими невесомыми стержнями, которая находится в однородном поле тяжести (рис. 1.2). Точка m_3 закреплена, точки m_1 и m_2 имеют равные массы, они движутся в среде с вязкостью r . Если их началь-

ные скорости равны и направлены противоположно ($\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$), то начальная скорость ЦМ С равна 0. Длины стержней в недеформированном состоянии l_0 , жесткость k . Пусть в начальный момент $t = 0$ все точки лежат в плоскости YOZ, а ось собственного вращения ОС образует с осью OY угол $\pi/2 - \theta_0$. Тогда начальные координаты частиц m_1 и m_2 равны:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = l_0 \cos(\pi/2 - \theta_0 + \pi/6), \quad z_1 = l_0 \sin(\pi/2 - \theta_0 + \pi/6), \\ x_2 = 0, \quad y_2 = l_0 \cos(\pi/6 - \pi/2 + \theta_0), \quad z_2 = -l_0 \sin(\pi/6 - \pi/2 + \theta_0),$$

Для того, чтобы рассматриваемая система вращалась вокруг оси симметрии ОС, необходимо задать начальные скорости частиц m_1 и m_2 : $v_1 = -v_2 = 2$. Все остальные проекции скоростей в момент $t = 0$ равны нулю.

На каждую частицу m_1 и m_2 действуют две силы упругости, сила вязкого трения и сила тяжести. Сила вязкого трения пропорциональна скорости и равна $-r\vec{v}$. Сила упругости находится из закона Гука $F_{ij} = k(l_{ij} - l_0)$, где $l_{ij} = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)^{0,5}$ — длина деформированного упругого стержня, соединяющего частицы m_i и m_j . Тогда равнодействующая сила, приложенная к i -ой частице имеет проекции:

$$F_{ix} = \sum_{j=1, i \neq j}^3 F_{ij} \frac{x_i - x_j}{l_{ij}}, \quad F_{iy} = \sum_{j=1, i \neq j}^3 F_{ij} \frac{y_i - y_j}{l_{ij}}, \quad F_{iz} = \sum_{j=1, i \neq j}^3 F_{ij} \frac{z_i - z_j}{l_{ij}}$$

Зная проекции силы в дискретный момент t можно, используя метод конечных разностей Эйлера, рассчитать проекции ускорений, скоростей и координаты частиц в момент $t + 1$ по формулам:

$$a_{ix}^{t+1} = (F_{ix}^t - r v_{ix}^t) / m_i, \quad a_{iy}^{t+1} = (F_{iy}^t - r v_{iy}^t) / m_i, \\ a_{iz}^{t+1} = (F_{iz}^t - r v_{iz}^t) / m_i - g, \\ v_{ix}^{t+1} = v_{ix}^t + a_{ix}^{t+1} \Delta \tau, \quad v_{iy}^{t+1} = v_{iy}^t + a_{iy}^{t+1} \Delta \tau, \quad v_{iz}^{t+1} = v_{iz}^t + a_{iz}^{t+1} \Delta \tau, \\ x_i^{t+1} = x_i^t + v_{ix}^{t+1} \Delta \tau, \quad y_i^{t+1} = y_i^t + v_{iy}^{t+1} \Delta \tau, \quad z_i^{t+1} = z_i^t + v_{iz}^{t+1} \Delta \tau,$$

Чтобы охарактеризовать движение волчка, проследим за перемещениями ЦМ С и его оси вращения ОС. Координаты ЦМ С определяются по формулам

$$x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2), \\ y_c = (m_1 y_1 + m_2 y_2) / (m_1 + m_2), \quad z_c = (m_1 z_1 + m_2 z_2) / (m_1 + m_2).$$

Для получения на экране ПЭВМ трехмерного изображения траектории ЦМ С необходимо перейти от ее пространственных координат x, y, z к координатам экрана X и Y . Для этого используются формулы:

$$X = (y_c - x_c) \cos \varepsilon, \quad Y = z_c - (x_c + y_c) \sin \varepsilon, \quad \varepsilon = \pi/8.$$

Для расчета угла прецессии φ и угла нутации θ от времени используют формулы:

$$\cos \varphi = x_S / \sqrt{x_S^2 + y_S^2}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}, \quad \varphi = \text{arctg}(\sin \varphi / \cos \varphi).$$

$$\cos \theta = z_S / l_0 \sin(\pi/3), \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \quad \theta = \text{arctg}(\sin \theta / \cos \theta).$$

Все это позволяет построить графики зависимостей φ и θ от времени.

3. Результаты моделирования

Рассмотренная выше модель позволяет промоделировать сферическое движение твердого тела и, в частности, вращение гироскопа в однородном нестационарном силовом поле. Даже с помощью трехточечной модели (программа ПР – 1, приложение) можно получить довольно интересные результаты, представленные на рис 1, 2, 3. На рис. 1 показана траектория движения центра масс гироскопа, движущегося в однородном поле тяжести с учетом силы вязкого трения. По аналогичной траектории движется **апекс** — точка пересечения оси волчка со сферой единичного радиуса. Видно, что угол нутации ТТ гироскопа периодически изменяется в некотором интервале, то есть происходит **нутация** волчка. Одновременно с этим ось волчка ОС прецессирует, поворачиваясь вокруг вертикальной оси oz . Из-за силы вязкого трения волчок теряет свою скорость и угол нутации постепенно увеличивается. Когда гироскоп остановится, его ось ОС будет направлена вертикально вниз.

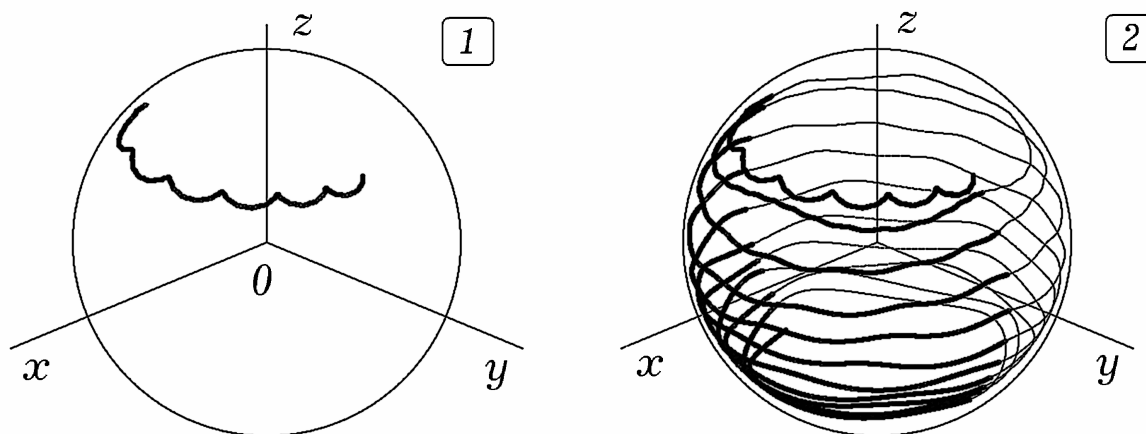


Рис. 2. Движение оси гироскопа в однородном поле тяжести.

Характер изменения угла нутации виден из рис. 3. Из-за уменьшения скорости собственного вращения среднее значение угла нутации увеличивается, период нутационных колебаний растет. Траектория движения центра масс зависит от начальных условий. Рис. 2 соответствует ситуации, когда $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ и начальная скорость ЦМ волчка равна нулю. Если начальные скорости частиц m_1 и m_2 по модулю будут неодинаковыми, то в момент $t = 0$ ЦМ волчка будет иметь некоторую скорость и станет выписывать петли, которые через некоторое время исчезают за счет силы вязкого трения (рис. 4).

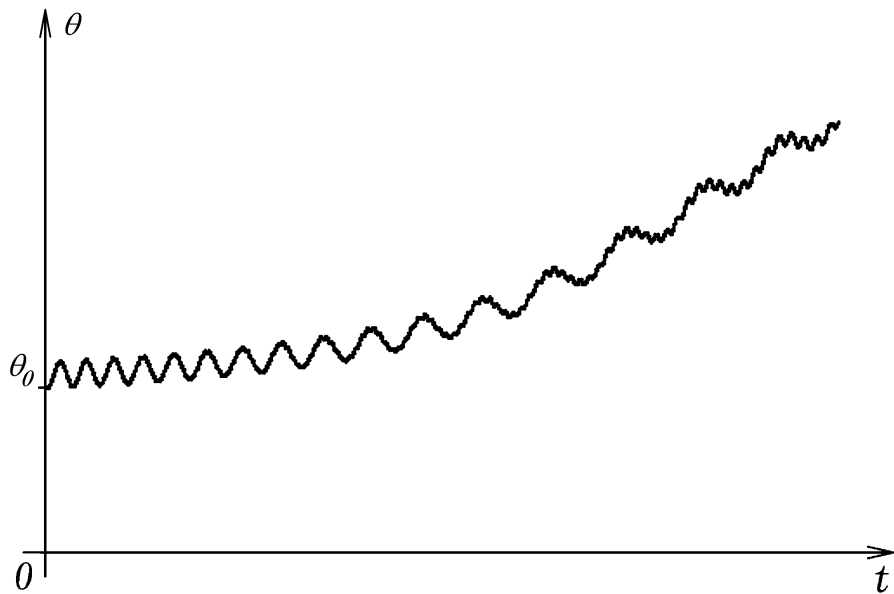


Рис. 3. Изменения угла нутации гироскопа с течением времени.

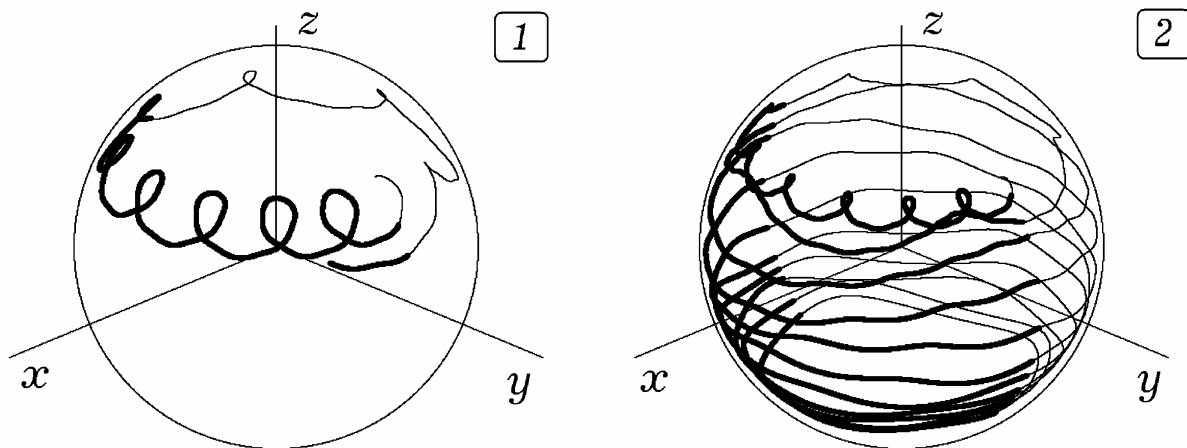


Рис. 4. Движение волчка: ЦМ имеет начальную скорость.

Для того, чтобы промоделировать сферическое движение произвольного твердого тела (асимметричного волчка) перейдем к модели из пяти частиц, находящихся в узлах правильной четырехугольной пирамиды (рис. 1.2). Эта задача решается аналогично, используется программа ПР-2. В случае, когда массы частиц одинаковы, программа моделирует движение осесимметричного волчка. В общем случае необходимо задать различные значения масс материальных точек.

На рис. 5.1 показана траектория движения центра масс симметричного волчка в силовом поле, интенсивность которого скачком увеличивается. Видно, что угол нутации успевает совершить несколько колебаний небольшой амплитуды и периода, после чего амплитуда и период нутационных колебаний возрастают. Не трудно промоделировать ситуации, когда массы частиц с течением времени изменяются, напряженность силового поля плавно уменьшается или резко поворачивается на заданный угол, точка O колеблется вдоль оси OZ . На рис. 5.2 показана сложная траектория центра масс асимметричного волчка (гироскопа со смещенным центром масс) в стационарном однородном поле.

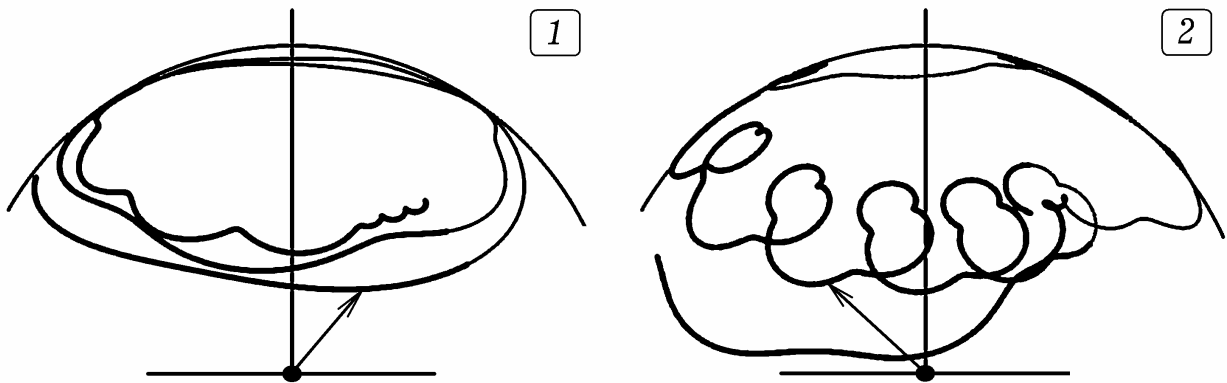


Рис. 5. Движение центра масс волчка (пятиточечная модель).

Чтобы добиться **регулярной прецессии**, при которой ось гироскопа не совершает нутационных колебаний, а движется строго по конической поверхности, необходимо подобрать очень специфические начальные условия. Если же просто увеличить скорость собственного вращения волчка, то его нутация будет практически незаметной. Такая прецессия называется **псевдoreгулярной** [4, с. 120 – 129].

Рассмотренные выше модели могут быть использованы при изучении основ механики и компьютерного моделирования. В книгах [2, 3] представлены другие компьютерные модели движения системы материальных точек и твердого тела в силовом поле.

Приложение

Ниже представлены компьютерные программы, позволяющие промоделировать сферическое движение твердого тела. Они работают в средах Borland Pascal или Free Pascal.

ПР-1.

```

uses crt, graph;
const N=3; dt=0.0002; Ms=40; pi=3.1415926;
      r=0.006; teta0=0.8; l0=5;
var m,Fx,Fy,Fz,x,y,z,vx,vy,vz,xx,yy: array[1..N] of real;
      Gd,Gm,i,j,k: integer; b,xs,ys,zs,ax,ay,az,F,l,t : real;
      teta,cost,sint,fi,cosfi,sinfi,Mx,My:real;
Procedure Sila;
begin
For i:=1 to N do begin Fx[i]:=0; Fy[i]:=0; Fz[i]:=0; end;
For i:=1 to N do for j:=1 to N do begin
  l:=sqrt(sqr(x[i]-x[j])+sqr(y[i]-y[j])+sqr(z[i]-z[j]));
  If l<>0 then begin F:=-25000*(l-l0);
    Fx[i]:=Fx[i]+F*(x[i]-x[j])/l; Fy[i]:=Fy[i]+F*(y[i]-y[j])/l;
    Fz[i]:=Fz[i]+F*(z[i]-z[j])/l; end; end; end;
Procedure Nach_uslov;
begin m[1]:=2; m[2]:=2; m[3]:=0.01; b:=pi/2-teta0;
  x[1]:=0; y[1]:=l0*cos(b+pi/6); z[1]:=l0*sin(b+pi/6);
  x[2]:=0; y[2]:=l0*cos(pi/6-b); z[2]:=-l0*sin(pi/6-b);

```

```

    vx[1]:=-4; vx[2]:=3.5; end;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
line(320,0,320,240);
line(320,240,round(320+300*cos(pi/8)),round(240+300*sin(pi/8)));
line(320,240,round(320-300*cos(pi/8)),round(240+300*sin(pi/8)));
circle(320,240,210); Nach_uslov;
Repeat Sila; For i:=1 to 2 do begin
    ax:=(Fx[i]-r*vx[i])/m[i]; ay:=(Fy[i]-r*vy[i])/m[i];
    az:=(Fz[i]-r*vz[i])/m[i]-0.05;
    vx[i]:=vx[i]+ax*dt; vy[i]:=vy[i]+ay*dt; vz[i]:=vz[i]+az*dt;
    x[i]:=x[i]+vx[i]*dt; y[i]:=y[i]+vy[i]*dt; z[i]:=z[i]+vz[i]*dt;
end; inc(k); t:=t+dt;
If k mod 30=0 then begin k:=0;
    xs:=(m[1]*x[1]+m[2]*x[2])/(m[1]+m[2]);
    ys:=(m[1]*y[1]+m[2]*y[2])/(m[1]+m[2]);
    zs:=(m[1]*z[1]+m[2]*z[2])/(m[1]+m[2]);
    Mx:=cos(pi/8); My:=sin(pi/8);
If xs>0 then circle(320+round(Ms*(ys-xs)*Mx*0.9),
                    240-round(Ms*(zs-(xs+ys)*My)),2);
If xs<0 then circle(320+round(Ms*(ys-xs)*Mx*0.9),
                    240-round(Ms*(zs-(xs+ys)*My)),1);
cost:=zs/l0/0.87; sint:=sqrt(1-cost*cost);
teta:=arctan(sint/cost);
circle(round(t/1),440-round(teta*200),1);
circle(round(t/1),441-round(teta*200),1);
{cosfi:=xs/sqrt(xs*xs+ys*ys); sinfi:=sqrt(1-cosfi*cosfi);
fi:=arctan(sinfi/cosfi);
circle(round(t/1),240-round(fi*100),1);} end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

ИП-2.

```

uses crt, graph;
const N=5; dt=0.0005; Ms=45; pi=3.1415926; r=0.01; teta0=0.6;
l0=10;
var m,Fx,Fy,Fz,x,y,z,vx,vy,vz,xx,yy: array[1..N] of real;
Gd,Gm,i,j,k: integer; b,xs,ys,zs,ax,ay,az,F,l,l1,t: real;
teta,cost,sint,fi,cosfi,sinfi,Mx,My,gg: real;
Procedure Sila;
label Metka;
begin
    For i:=1 to N do begin Fx[i]:=0; Fy[i]:=0; Fz[i]:=0; end;
    For i:=1 to N do for j:=1 to N do begin
        If j=i then goto Metka; l1:=l0;
        l:=sqrt(sqr(x[i]-x[j])+sqr(y[i]-y[j])+sqr(z[i]-z[j]));
        If (i*j=3)or(i*j=6)or(i*j=8)or(i*j=4)then l1:=l0/1.41;
        F:=-25000*(l-l1); Fx[i]:=Fx[i]+F*(x[i]-x[j])/l;
        Fy[i]:=Fy[i]+F*(y[i]-y[j])/l;
        Fz[i]:=Fz[i]+F*(z[i]-z[j])/l; Metka: end;
    end;
Procedure Nach_uslov;
begin b:=pi/2-teta0;
m[1]:=1; m[2]:=1; m[3]:=1; m[4]:=1.1; m[5]:=0.01;
x[1]:=0; y[1]:=l0*cos(b+pi/6); z[1]:=l0*sin(b+pi/6);

```

```

x[2]:=0; y[2]:=10*cos(pi/6-b); z[2]:=-10*sin(pi/6-b);
z[3:]=(z[1]+z[2])/2; y[3:]=(y[1]+y[2])/2; z[4]:=z[3]; y[4]:=y[3];
x[3]:=10*sin(pi/6); x[4]:=-10*sin(pi/6); x[5]:=0; y[5]:=0;
z[5]:=0;
vx[1]:=-42; vx[2]:=40; end;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
line(390,0,390,500); Nach_uslov;
Repeat Sila;
for i:=1 to 4 do begin ax:=(Fx[i]-r*vx[i])/m[i];
ay:=(Fy[i]-r*vy[i])/m[i]; az:=(Fz[i]-r*vz[i])/m[i]-0.3;
vx[i]:=vx[i]+ax*dt; vy[i]:=vy[i]+ay*dt; vz[i]:=vz[i]+az*dt;
x[i]:=x[i]+vx[i]*dt; y[i]:=y[i]+vy[i]*dt; z[i]:=z[i]+vz[i]*dt;
end; inc(k); t:=t+dt;
If k mod 30=0 then begin k:=0;
xs:=(m[1]*x[1]+m[2]*x[2]+m[3]*x[3]+m[4]*x[4])/
(m[1]+m[2]+m[3]+m[4]);
ys:=(m[1]*y[1]+m[2]*y[2]+m[3]*y[3]+m[4]*y[4])/
(m[1]+m[2]+m[3]+m[4]);
zs:=(m[1]*z[1]+m[2]*z[2]+m[3]*z[3]+m[4]*z[4])/
(m[1]+m[2]+m[3]+m[4]);
Mx:=cos(pi/8); My:=sin(pi/8);
If xs>0 then circle(390+round(Ms*(ys-xs)*Mx*0.9),
500-round(Ms*(zs-(xs+ys)*My) ),2);
If xs<0 then circle(390+round(Ms*(ys-xs)*Mx*0.9),
500-round(Ms*(zs-(xs+ys)*My)),1);
circle(390,500,10*Ms); end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т.1. Механика. — М.: Физматлит, 2004. — 224 с.
2. Майер Р.В. Задачи, алгоритмы, программы. [Электронный ресурс] — URL: <http://maier-rv.glazov.net>, <http://komp-model.narod.ru>.
3. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений. — Глазов, ГГПИ: 2009. — 112 с.
4. Савельев И.В. Основы теоретической физики: Учеб руководство: Для вузов. В 2 т. Т.1. Механика и электродинамика. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 496 с.