

Метод компьютерного моделирования при изучении физических явлений

Часто аналитические методы не позволяют исследовать эволюцию сложных систем, или их применение связано со сложными математическими выкладками. В этом случае создают компьютерную модель, имитирующую поведение исследуемого объекта, и проводят серию вычислительных экспериментов, изменяя начальные условия и внешние воздействия. Моделирование сложных систем требует численного решения дифференциальных уравнений на ЭВМ. Используемый при этом метод сеток состоит в том, что области непрерывного изменения аргументов изучаемой функции заменяют конечным множеством узлов, образующих многомерную сетку. Переходят к функции дискретного аргумента, приближенно вычисляют производные и интегралы. В методе Эйлера бесконечно малые приращения функции $f = f(x, y, z, t)$ и приращения ее аргументов заменяются малыми, но конечными разностями.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$ при известных начальных условиях $x_0 = x(0)$, $v_0 = v(0)$. Запишем его в виде системы двух диффуравнений первого порядка:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v, \quad a = \frac{F(t) - r\dot{x} - kx}{m}.$$

Используя схему Эйлера, в конечных разностях получаем:

$$a^{t+\Delta t} = \frac{F^{t+\Delta t} - rv^t - kx^t}{m}, \quad v^{t+\Delta t} = v^t + a^{t+\Delta t} \Delta t, \quad x^{t+\Delta t} = x^t + v^{t+\Delta t} \Delta t.$$

Для численного решения ДУ следует создать цикл по t , в котором пересчитываются значения a , v , x , и результат выводится на экран.

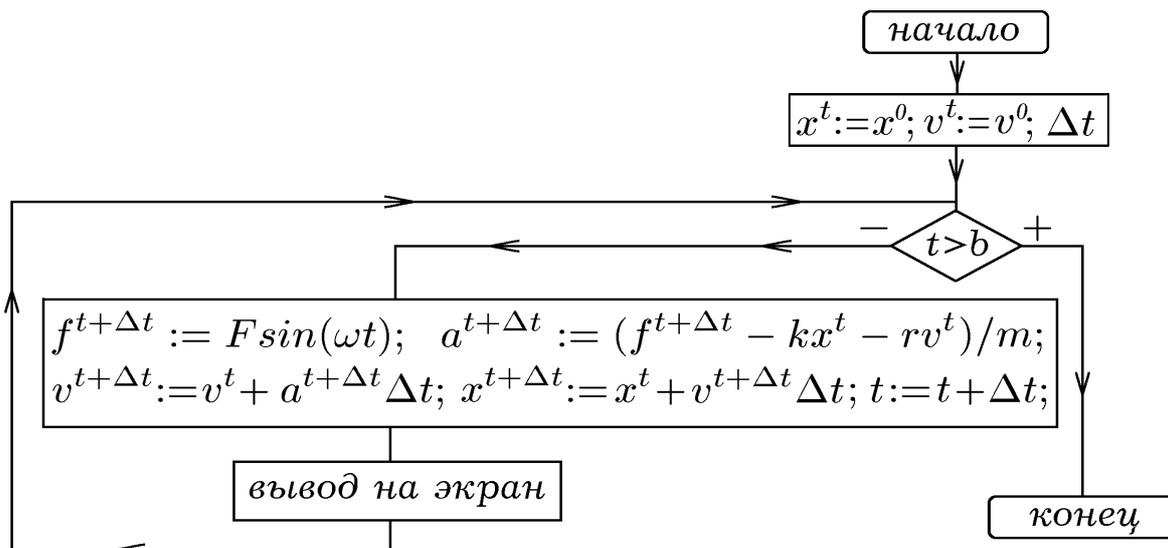


Рис. 1.

На рис.1 представлена блок–схема алгоритма, используемого для моделирования вынужденных колебаний методом конечных разностей. В начале задаются начальные условия: координата и скорость в момент времени $t = 0$, а также шаг Δt . В цикле по переменной t вычисляются значения вынуждающей силы, ускорения, скорости и координаты в последовательные моменты времени $t = i \cdot \Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ и выводятся результаты на экран ЭВМ.

Исследование многих физических систем требует решения дифференциального уравнения в частных производных в замкнутой области D при известном распределении искомой функции на границе области $\varphi_0 = \varphi(D_0)$ (задача Дирихле). В качестве примера рассмотрим решение уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = f(x, y).$$

В конечных разностях получаем:

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2) = f_{i,j}.$$

где $O(h^2)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем шаг h^2 , где $h = \Delta x = \Delta y$. Имеем: $\varphi_{i,j} = 0,25(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}) - f_{i,j}h^2$.

В результате большого числа итераций, осуществляемых в цикле, может быть рассчитано искомые значения функции в узлах сетки. Рассмотрим примеры решения некоторых задач с помощью ПЭВМ.

Задача 1. Рассчитайте движение ракеты, удаляющейся по прямой от Земли (рис. 2.1), если масса горючего уменьшается со скоростью $b = const$. Масса оболочки равна m_0 , масса заправленной ракеты $m > m_0$. Относительная скорость вытекания газов равна $v_{отн}$. Постройте графики $x(t)$, $v_x(t)$, $m(t)$. Результаты моделирования представлены на рис. 2.2. При $t > t'$ двигатель работает, масса ракеты уменьшается, скорость увеличивается. После выключения двигателя ($t = t'$), скорость уменьшается, масса остается неизменной.

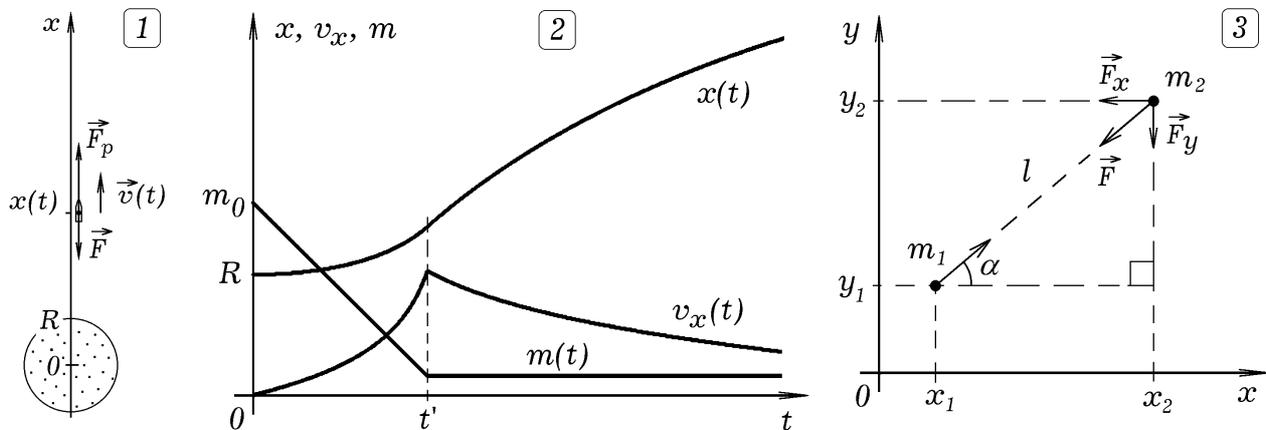


Рис.2.

Задача 2. Планета вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите (рис. 3.1). Постройте графики зависимости расстояния r до Солнца, линейной v и секториальной ω_s скорости планеты от времени. Подтвердите, что секто-

риальная скорость планеты остается постоянной (второй закон Кеплера). Компьютерная модель создается на основе геометрических построений, представленных на рис.2.3 и 3.1. Графики зависимостей $r(t)$, $v(t)$, $\omega_s(t)$ изображены на рис. 3.2. Видно, что секториальная скорость остается постоянной.

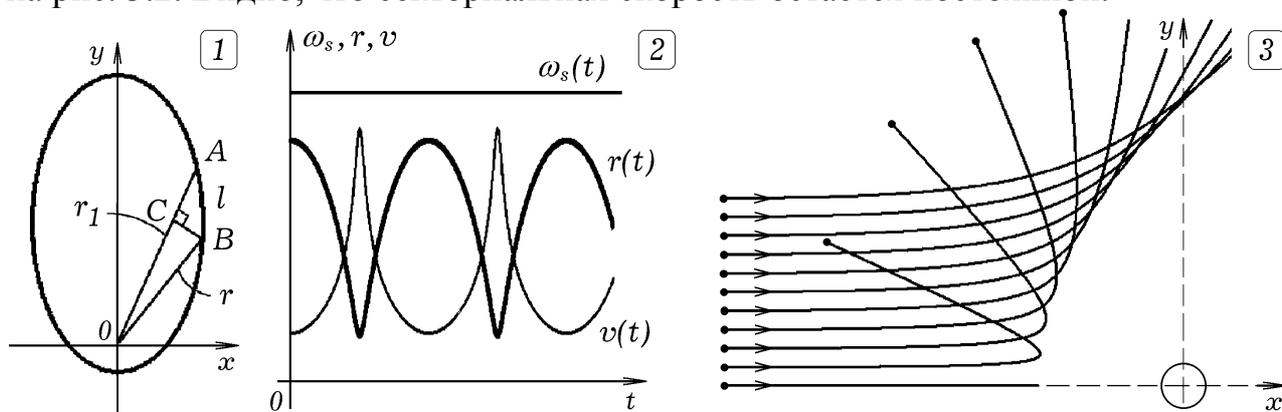


Рис.3.

Задача 3. По направлению к массивному положительно заряженному ядру движется поток альфа-частиц (опыт Резерфорда). Постройте траектории движения частиц при различных значениях прицельного параметра. Результат решения задачи приведен на рис. 3.3.

Задача 4. Колебательная система состоит из тела массой m , находящегося на пружине с жесткостью k в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r . Систему вывели из состояния равновесия и предоставили самой себе. Изучите возникающие колебания. Алгоритм решения этой и следующей задачи представлен на рис. 1. Получающиеся графики и фазовые кривые — на рис. 4.1.

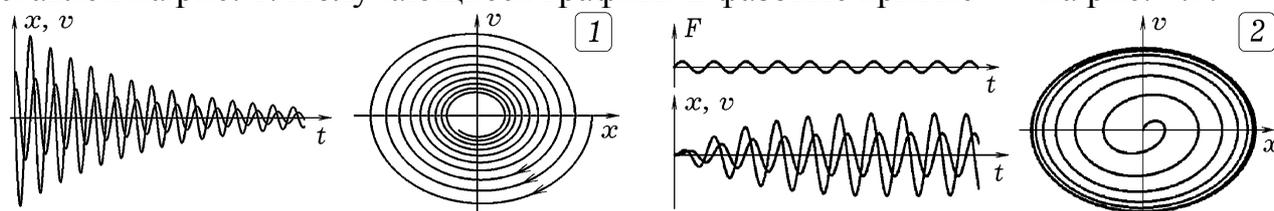


Рис.4.

Задача 5. На тело, подвешенное на пружине, действует внешняя гармоническая сила. Получите графики $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$, постройте фазовый портрет системы. Задача решается аналогично (рис. 4.2).

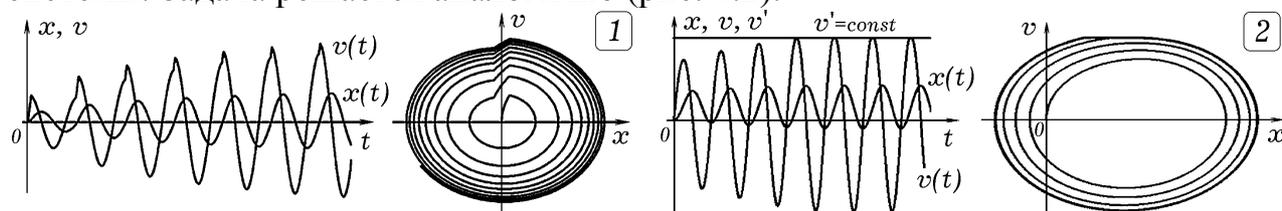


Рис. 5.

Задача 6. Исследуйте автоколебательную систему, которая посредством положительной обратной связи сама регулирует поступление энергии от источника. Пусть вблизи положения равновесия, когда $-b < x < b$ и тело движется в направлении оси ОХ, на него действует постоянная сила F_m . Постройте графики $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$, и фазовый портрет системы. Решение — на рис. 5.1.

Задача 7. Изучите колебания физического маятника, расположенного на вращающемся валу (маятник Фроуда), если сила трения между валом и маятником с ростом скорости убывает по экспоненциальному закону. Результат моделирования приведен на рис. 5.2.

Задача 8. Промоделируйте расплывание пятна в фазовом пространстве в случае свободных незатухающих, затухающих, а также вынужденных колебаний математического маятника. Создадим программу, решающую уравнение $m\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_0 \sin(\omega t)$ и рассчитывающую состояние ансамбля математических маятников через некоторое время t . На рис. 6.2, 6.3, 6.4 показана эволюция фазового объема в случае свободных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний осциллятора. Расплывание фазового пятна в случае незатухающих колебаний математического маятника видно из рис. 7. Если колебания затухающие, то фазовый объем сжимается (рис. 8).

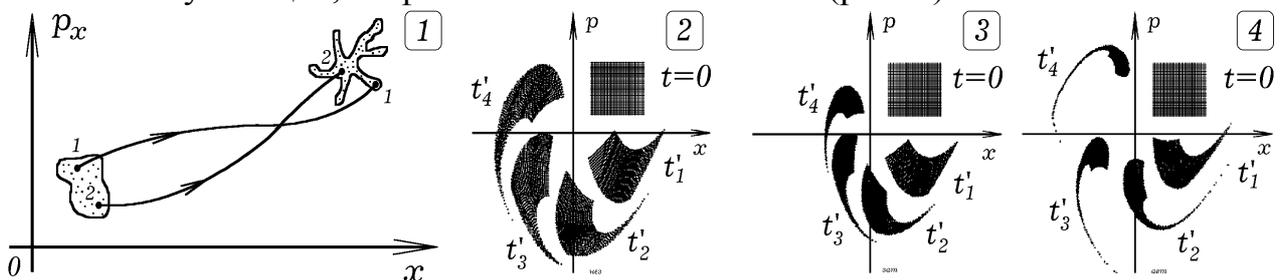


Рис. 6.

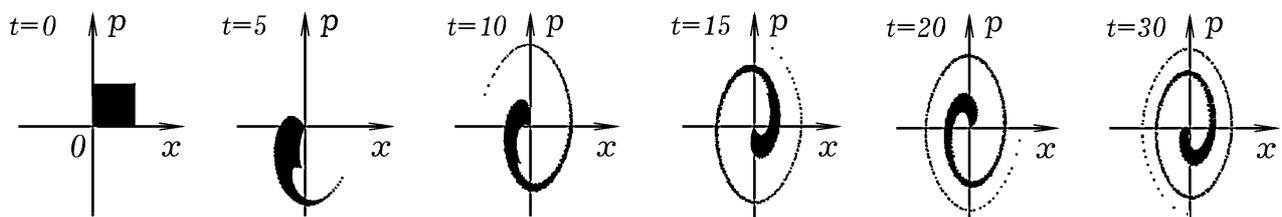


Рис. 7.

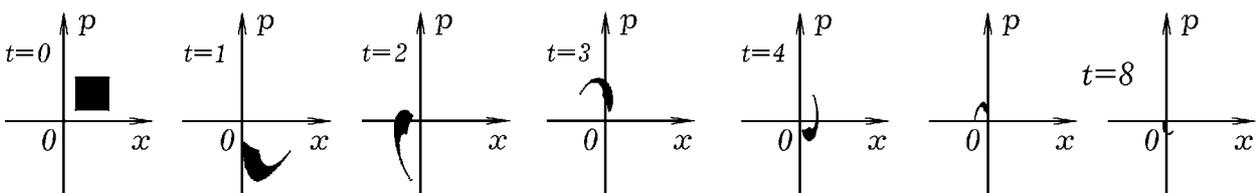


Рис. 8.

Задача 9. Получите сечения Пуанкаре для маятника Даффинга. Промоделируем колебания маятника Даффинга и определим его состояния в моменты времени, когда фаза вынуждающей силы α равна $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. Сечение Пуанкаре имеет фрактальную структуру (рис. 9), движение хаотическое.

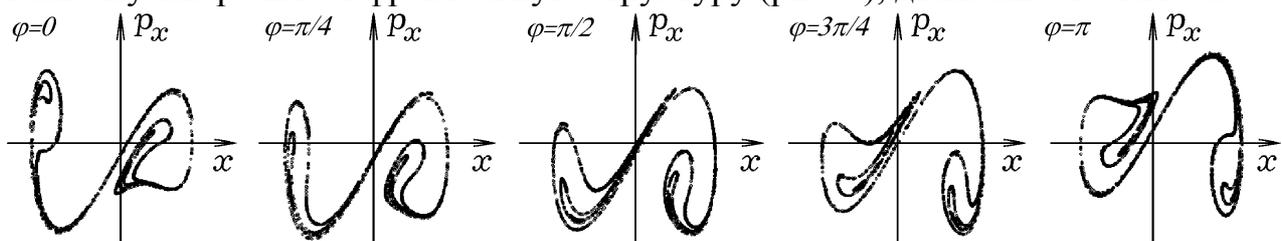


Рис. 9.

Задача 10. Про моделируйте перемешивание фазового объема в случае свободных незатухающих колебаний маятника Даффинга. Представим себе совокупность одинаковых маятников Даффинга, совершающих свободные незатухающие колебания в соответствии с уравнением $m\ddot{x} + (x^3 - x) = 0$, и отличающиеся только начальными условиями x_0, p_0 . Пусть в момент $t = 0$ фазовые точки, характеризующие начальное состояние маятников, находятся внутри прямоугольника $[x, x + \Delta x, p_x, p_x + \Delta p_x]$. Программа рассчитывает состояние каждого маятника в моменты времени t_1, t_2, \dots , и ставит соответствующую точку на фазовой плоскости. Из рис. 10 видно, что фазовый объем, сохраняя свою величину, расплывается и перемешивается в фазовом пространстве, что свидетельствует о хаотичности колебаний.

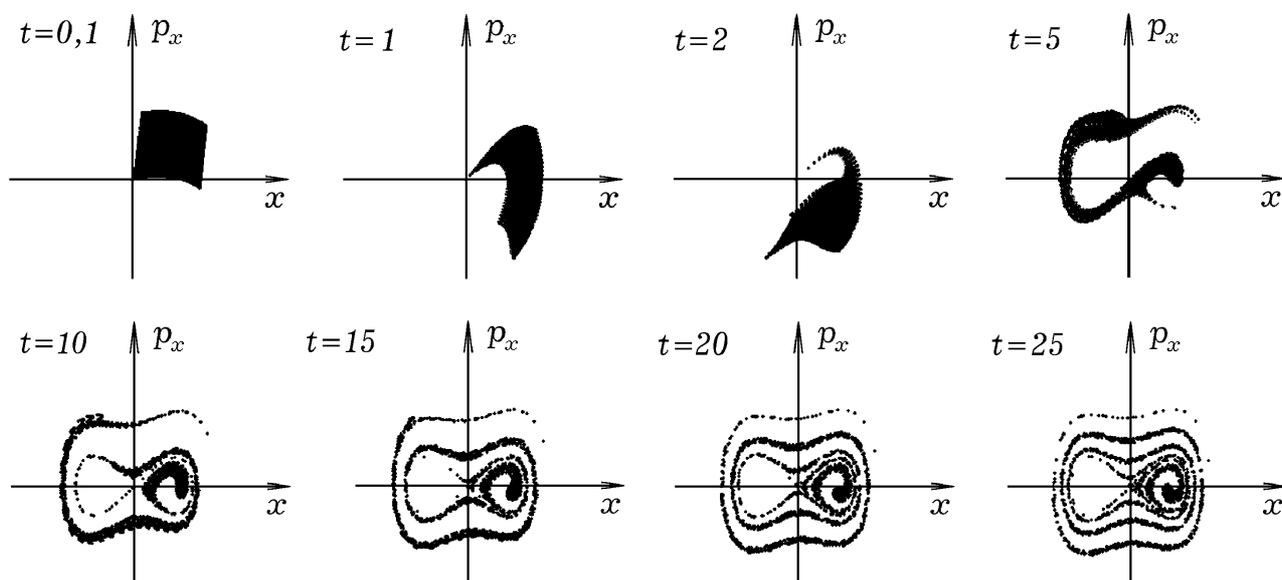


Рис. 10.

Задача 11. Имеется прямоугольная пластина, некоторые элементы которой совершают колебания, а некоторые — не способны колебаться. Края пластины закреплены. Изучите распространение, отражение, интерференцию и дифракцию упругой волны в двумерной среде. Результат решения — на рис. 11.



Рис. 11.

Задача 12. Изучите течение вязкой жидкости, которое инвариантно по отношению к переносам в направлении движения (течение жидкости в трубе, обтекание бесконечно длинного корабля и т.д.). Рассчитаем скорости в сечении, перпендикулярном направлению течения (оси z), то есть решим уравнение:

$$\frac{dv_z}{dt} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Полагая, что $\partial p / \partial z = a$, запишем это уравнение в конечных разностях:

$$v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^k + v \left(\frac{v_{i-1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j-1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} \right) \Delta t - \frac{a}{\rho} \Delta t.$$

Решение задачи требует правильного задания граничных условий: слои вязкой жидкости, прилегающие к поверхности твердого тела, имеют одинаковую с ним скорость. Если жидкость имеет свободную поверхность, то скорость частиц этой поверхности равна скорости частиц, расположенных слоем ниже. На рис.12 представлены результаты расчета: 1) обтекания жидкостью длинного корпуса движущегося корабля; 2) течения в трубе при разности давлений; 3) движения жидкости в трубе в случае, когда вдоль ее оси протягивается нить.

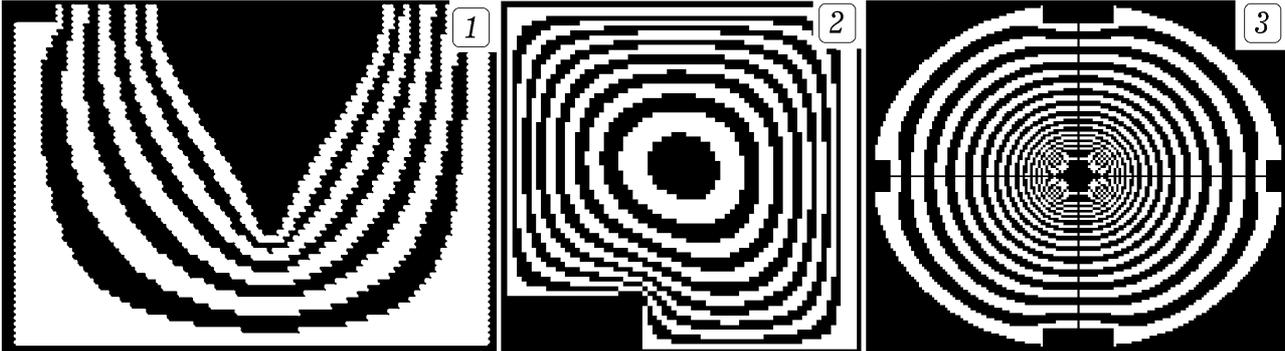


Рис. 12.

Задача 13. Изучите установившееся потенциальное течение идеальной жидкости в трубе прямоугольного сечения, содержащей препятствия. Такое течение является плоским и характеризуется потенциалом скорости $\varphi(x, y, z)$ и функцией тока $f(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Семейство линий равного потенциала скорости $\varphi(x, y, z) = const$ ортогонально совокупности линий тока $f(x, y, z) = const$. Значения функции тока находят с помощью конечно-разностного уравнения (так как $\Delta x = \Delta y$):

$$f_{ij} = 0,25(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}).$$

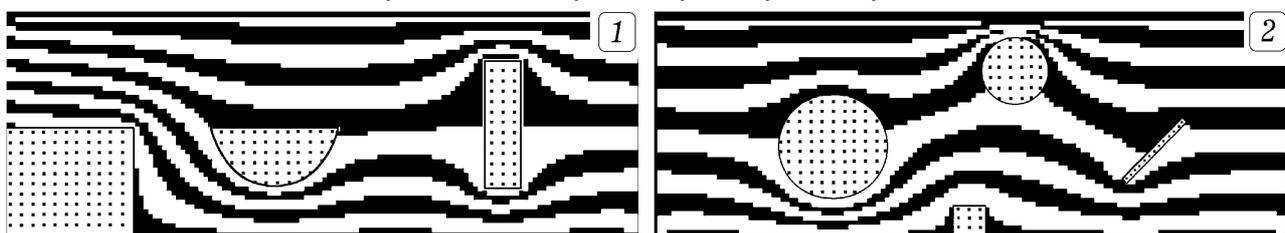


Рис. 13.

В программе последовательно перебираются узлы сетки, вычисляются значения функции тока $f_{i,j}$, и результат через каждые 10 итераций выводится на экран (рис. 13). Программы размещены на сайте <http://maier-rv.glazov.net>.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.