Майер Р.В.

ГОУ ВПО “Глазовский государственный педагогический институт”, Глазов

РАСЧЕТ СКОЛЬЖЕНИЯ ТЕЛА ПО ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПЭВМ

Одно из направлений использования информационных технологий при изучении физики состоит в компьютерном моделировании механических явлений, в частности движения точки по горке со сложным профилем. Рассмотрим несколько задач, связанных с расчетом скольжения тела по искривленной поверхности в поле тяжести, определением точки отрыва и расчетом движения после отрыва.

1. Задача о таутохроне. Таутохроной называется кривая, время скольжения точки по которой в поле тяжести не зависит от начального положения точки. Таутохронными свойствами обладает циклоида. Убедиться в этом можно с помощью компьютерной программы, моделирующей скольжение точки по циклоидальной горке и вычисляющей время движения при различных начальных положениях точки.

Запишем уравнения циклоиды: $x = R(\alpha - \sin\alpha)$, $y = R(1-\cos\alpha)$. Допустим точка имеет координаты (x, y). Соответствующий им параметр α может быть найден следующим образом: $c = \cos\alpha = 1 - y/R$, $s = \sin\alpha = (1-c^2)^{1/2}$, если $y \le R$, то $\alpha = arctg(s/c)$, а иначе $\alpha = \pi/2 - arctg\,|s/c|$. Чтобы определить угол β (рис. 1.1), найдем координаты двух близко расположенных точек, соответствующих значениям параметра $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + \Delta\alpha$: $x_1 = R(\alpha_1 - \sin\alpha_1)$, $y_1 = R(1-\cos\alpha_1)$,

$$x_2 = R(\alpha_2 - \sin\alpha_2), \quad y_2 = R(1-\cos\alpha_2).$$

Тогда угол β между касательной к траектории и осью Oy равен

$$\beta = \frac{\pi}{2} - arctg\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Из основного закона динамики: $m\vec{g} + \vec{N} - r\vec{\upsilon} = m\vec{a}$. Тангенциальное ускорение тела равно: $a_\tau = g\cos\beta - r\upsilon/m$. Его скорость и координаты в следующий дискретный момент времени вычисляются по формулам:

$$\upsilon^{t+1} = \upsilon^t + a_\tau^{t+1}\Delta\tau, \quad x^{t+1} = x^t + \upsilon^{t+1}\sin\beta\Delta\tau, \quad y^{t+1} = y^t + \upsilon^{t+1}\cos\beta\Delta\tau.$$

Таким образом, программа ПР – 1, моделирующая скольжение тела по циклоидальной горке, должна содержать цикл по времени t, в котором будут пересчитываться координаты и скорости частицы, осуществляться построения ее изображения на экране, вычисляться время движения. Можно убедиться в том, что оно не зависит от начального положения точки.

```
uses dos, crt, graph;                                                    {ПР – 1}
const r=100; g=10; rs=0.00; dx=0.001; dt=0.0005; da=0.001; pi=3.1415926;
var c,s,a,b,x1,x2,y1,y2,at,v,vx,vy,x,y,t: real; Gd,Gm,n : integer; tt : string;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
a:=1.3; x:=r*(a-sin(a)); y:=r*(1-cos(a));
Repeat c:=1-y/r; s:=sqrt(1-c*c);
If y<=r then a:=arctan(s/c) else a:=pi-arctan(abs(s/c));
x1:=r*(a-sin(a)); y1:=r*(1-cos(a)); a:=a+da; x2:=r*(a-sin(a)); y2:=r*(1-cos(a));
b:=pi/2-arctan((y2-y1)/(x2-x1)); at:=g*cos(b)-rs*v; v:=v+at*dt;
x:=x+v*sin(b)*dt; y:=y+v*cos(b)*dt;
If n/100=round(n/100) then begin circle(120+round(x),240+round(y),1); end;
n:=n+1; circle(120,240,2); t:=t+dt;
until (KeyPressed)or(a>pi); Str(round(t*1000),tt); OutTextXY(10,10,tt); Readkey;
END.
```

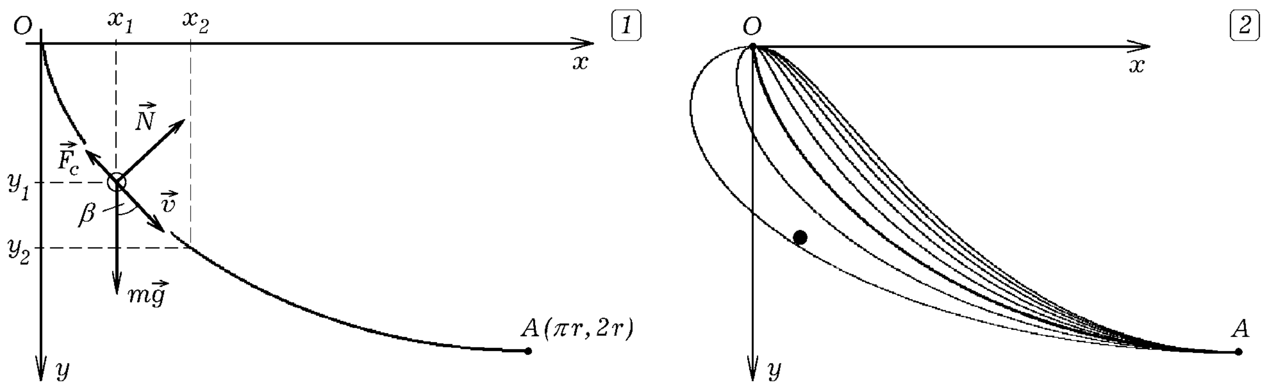

Рис. 1. К доказательству брахистохронных и таутохронных свойств циклоиды.

2. Задача о брахистохроне. Брахистохроной называется кривая наибыстрейшего спуска. Можно аналитически доказать, что брахистохроной является циклоида. Попытаемся убедиться в этом с помощью вычислительного эксперимента.

Рассмотрим скольжение частицы массой m по кривой, задаваемой параметрическими уравнениями $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ в однородном поле тяжести. Исходя из параметра α, можно вычислить координаты частицы x_1 и y_1. Если параметру α дать малое приращение $\Delta\alpha$ и рассчитать соответствующие координаты x_2, y_2, то элементарное перемещение Δs можно найти по формуле: $\Delta s = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{0,5}$.

Скорость υ вычисляется из закона сохранения механической энергии: $\upsilon = \sqrt{2gy_1}$. Это позволяет определить промежуток времени $\Delta t = \Delta s / \upsilon$, в течение которого частица, двигаясь со скоростью υ, прошла расстояние Δs. Суммируя элементарные промежутки времени Δt можно получить общее время скольжения частицы по кривой из точки $O(0,0)$ до точки $A(\pi R, 2R)$.

Допустим, необходимо сравнить время скольжения частицы по циклоиде с аналогичным временем движения по другой кривой, достаточно близкой к циклоиде и проходящей через точки $O(0,0)$ и $A(\pi R, 2R)$. Эти кривые могут быть заданы уравнениями:

$$x = (R/k)(k\alpha - \sin\alpha), \quad y = R(1 - \cos\alpha),$$

где k — некоторый параметр. Видно, что независимо от значения k при $\alpha = 0$, $x = 0$, $y = 0$, а при $\alpha = \pi$, $x = \pi R$, $y = 2R$, то есть кривые соединяют точки $O(0,0)$ и $A(\pi R, 2R)$. При $k = 1$ получается циклоидальная траектория. В программе можно создать цикл, в котором с некоторым шагом будет изменяться параметр k и вычисляться время движения материальной точки по соответствующей кривой. Это позволит доказать, что кривой наибыстрейшего спуска является циклоида.

Текст используемой программы ПР – 2 приводится ниже. При ее запуске на экране рисуются траектории, соответствующие различным значениям k (рис. 1.2), и рассчитывается время движения частицы. Из результатов вычислительного эксперимента следует, что минимальным является время движения по циклоиде, что соответствует $k = 1$.

```
uses dos, crt, graph;                                                    {ПР – 2}
const r=150; dx=0.001; dt=0.001; da=0.0005; pi=3.1415926;
var k,a,x1,x2,y1,y2,ds,at,v,vx,vy,t : real; Gd,Gm,n,i : integer; tt,kk : string;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
For i:=1 to 8 do begin k:=0.4+0.2*i; a:=0; t:=0;
Repeat a:=a+da; x1:=r/k*(k*a-sin(a)); y1:=r*(1-cos(a));
a:=a+da; x2:=r/k*(k*a-sin(a)); y2:=r*(1-cos(a));
ds:=sqrt(sqr(x1-x2)+sqr(y1-y2)); v:=sqrt(20*y1); t:=t+ds/v;
Putpixel(110+round(x1),150+round(y1),15); until (KeyPressed)or(a>pi);
Str(round(t*1000),tt); OutTextXY(550,10*i,tt); Str(round(k*10),kk); OutTextXY(500,10*i,kk);
end; Readkey;
END.
```

3. Задача о скольжении шайбы по сферической поверхности. Допустим, шайба скользит по шероховатой сферической поверхности и отрывается от нее на некоторой высоте h. Необходимо рассчитать траекторию шайбы и время движения. Из второго закона Ньютона

следует: $mg\sin\alpha - \mu N = ma_\tau$, $N = mg\cos\alpha$. Поэтому тангенциальное ускорение равно: $a_\tau = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Тогда скорость и координаты шайбы

$$\upsilon^{t+1} = \upsilon^t + a_\tau^{t+1}\Delta\tau, \quad x^{t+1} = x^t + \upsilon^{t+1}\cos\alpha\Delta\tau, \quad y^{t+1} = y^t - \upsilon^{t+1}\sin\alpha\Delta\tau.$$

В момент отрыва шайба движется с ускорением g, при этом ее нормальное ускорение $a_n = g\cos\alpha = \upsilon^2 / R$. После отрыва от сферической поверхности шайба движется под действием силы тяжести $\upsilon_x^{t+1} = \upsilon\cos\alpha$, $\upsilon_y^{t+1} = \upsilon_y^t - g\Delta\tau$, $x^{t+1} = x^t + \upsilon_x^{t+1}\Delta\tau$, $y^{t+1} = y^t + \upsilon_y^{t+1}\Delta\tau$. Используется программа ПР – 3, в ней определяется высота h отрыва шайбы и общее время движения. Результат моделирования приведен на рис. 2.1.

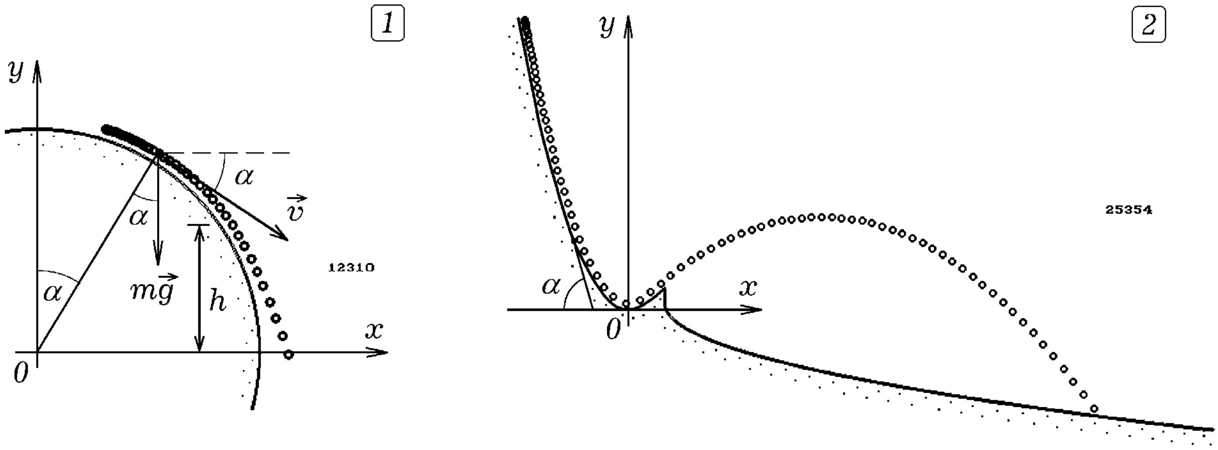

Рис. 2. Результаты решения задач: 1) скольжение тела по сферической поверхности; 2) прыжок лыжника с трамплина.

```
uses dos, crt, graph;                                                    {ПР – 3}
const r=200; m=1; mu=0.1; g=10; dt=0.001; pi=3.1415926;
var a,at,v,vx,vy,x,y,t : real; Gd, Gm,n : integer; tt : string;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
Line(20,400,600,400); Circle(120,400,199); a:=0.3; x:=r*sin(a); y:=r*cos(a);
Repeat if v<sqrt(g*r*cos(a)) then begin a:=arctan(x/y);
at:=g*(sin(a)-mu*cos(a)); v:=v+at*dt; x:=x+v*cos(a)*dt;
y:=y-v*sin(a)*dt; vx:=v*cos(a); vy:=-v*sin(a); end
else begin vx:=v*cos(a); vy:=vy-g*dt; x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt;
Circle(250,400-round(y),1); end;
If n/300=round(n/300) then begin Circle(120+round(x),400-round(y),3); end; n:=n+1;
Circle(120,400,2); t:=t+dt;
until (KeyPressed)or(y<-1);
```

Str(round(t*1000),tt); OutTextXY(10,10,tt); Readkey;
END.

4. Задача о лыжнике. Пусть необходимо рассчитать траекторию движения лыжника, скатывающегося с горы и прыгающего с трамплина в случае, когда профиль горки задается уравнением $y = 0{,}015x^2$, где $x \in [-180;30]$, а профиль склона, на который приземляется лыжник, — уравнением $y = -(50x - 3000)^{0,5}$, где $x \in [60;+\infty[$. Из второго закона Ньютона следует $a_\tau = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Получаем:

$$\upsilon^{t+1} = \upsilon^t + a_\tau^{t+1}\Delta\tau, \quad x^{t+1} = x^t + \upsilon^{t+1}\cos\alpha\Delta\tau, \quad y^{t+1} = y^t - \upsilon^{t+1}\sin\alpha\Delta\tau,$$

где α — угол между касательной к поверхности горки и отрицательным направлением оси Ox, равный $\alpha = arctg[(y_1 - y_2)/(x_2 - x_1)]$. Движение лыжника после отрыва от трамплина моделируется также как в предыдущем случае. Используется программы ПР – 4, результат вычислений — на рис. 2.2.

```
uses dos, crt, graph;                                             {ПР – 4}
const r=200; m=1; mu=0.2; g=10; dt=0.001; dx=0.1; pi=3.1415926;
var a,b,x1,x2,y1,y2,at,v,vx,vy,x,y,t : real; Gd, Gm,n : integer; tt : string;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
b:=0.015; x:=-160; y:=b*x*x;
Repeat t:=t+dt; delay(1);
If x<30 then begin x1:=x; y1:=b*x1*x1; x2:=x+dx; y2:=b*x2*x2; a:=arctan((y1-y2)/(x2-x1));
at:=g*(sin(a)-mu*cos(a)); v:=v+at*dt; x:=x+v*cos(a)*dt; y:=y-v*sin(a)*dt;
vx:=v*cos(a); vy:=-v*sin(a); end else begin vy:=vy-g*dt; x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt; end;
If x<60 then circle(120+round(0.5*x),280-round(0.5*y),1);
If n/300=round(n/300) then begin circle(120+round(0.5*x),280-round(0.5*y),3); end; n:=n+1;
until (KeyPressed)or((y<0)and(0.02*y*y>x-60));
x:=60; Repeat x:=x+1; y:=-sqrt((x-60)/0.02); circle(120+round(0.5*x),280-round(0.5*y),1);
until x>1000; Str(round(t*1000),tt); OutTextXY(40,330,tt); Readkey;
END.
```

Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В двух томах. – – С.Пб.: Издательство “Лань”, 1998. — 736 с.
2. Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений: Монография. — Глазов: ГГПИ, 2009. — 112 с.
3. Web–сайт http://maier-rv.glazov.net (электронный ресурс).