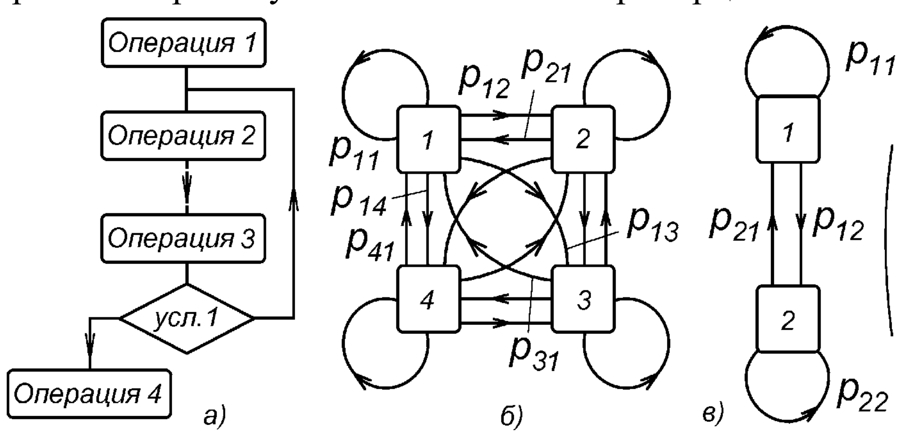
Майер Р.В.
Глазовский государственный педагогический институт

Исследование учебной деятельности с помощью абстрактной модели ученика

Эффективный метод исследования процесса обучения состоит в построении структурно–алгоритмической модели учебной деятельности, что может быть осуществлено на основе принципов, сформулированных в [2, с. 38]. Структурно–алгоритмический подход предусматривает рассмотрение любой деятельности как системы взаимосвязанных операций (элементарных действий), которая приводит к достижению поставленной цели. Ее удобно изображать в виде графа деятельности, представляющего собой совокупность вершин, соединенных дугами, который соответствует определенной последовательности выполнения некоторого множества операций.

Учащийся, решая последовательность однотипных задач (проводя серию опытов или измерений), работает по жесткому алгоритму, выполняя конечный набор действий в определенном порядке (рис. 1, а). Можно предположить, что если учащийся необучен, то он выбирает каждую следующую операцию совершенно случайно и после ее выполнения сравнивает свои действия с эталоном (учителем). Учитель подтверждает правильность выбора операции или сообщает, что выбор сделан неверно, подсказывая какую операцию следовало бы выбрать. Так происходит обучение, в результате которого в сознании учащегося устанавливаются связи между отдельными операциями. Вследствие забывания уровень знаний ученика со временем уменьшается, причем скорость уменьшения знаний пропорциональна их количеству.



$$\begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12}, & p_{13}, & p_{14} \\ p_{21}, & p_{22}, & p_{23}, & p_{24} \\ p_{31}, & p_{32}, & p_{33}, & p_{34} \\ p_{41}, & p_{42}, & p_{43}, & p_{44} \end{pmatrix}$$

Рис. 1

Таким образом учащийся ведет себя как вероятностный автомат, выполняющий последовательность действий в зависимости от входной информации и своего внутреннего состояния. Его алгоритм удобно задать в виде стохастического графа – совокупности вершин, соединенных стрелками, которые соответствуют переходам от одной операции к другой (рис. 1, б, в). Вероятности переходов можно представить в виде матрицы вероятностей (рис. 1, г). Автомат, моделирующий ученика, имеет входной алфавит $X =$(Правильно, Неправильно) и m внутренних состояний, соответствующих различным операциям и совпадающих с выходным алфавитом $Y = (y_1,..., y_m)$. Этот автомат будем называть абстрактной моделью ученика (АМУ).

Пусть с целью формирования определенного навыка АМУ совершает серию из большого числа N однотипных действий. Если АМУ необучена, то вероятности выбора любого из m действий равны. При этом вероятность правильного выбора действия $p = 1/m$, а вероятность ошибочного выбора $q = 1 - p = (m-1)/m$. При получении входной информации, подтверждающей правильность или неправильность выбора, вероятность совершения правильного выбора p возрастает на величину $\alpha(1-p) = \alpha q$, а вероятность ошибки q уменьшается на такую же величину, где α — коэффициент научения $(0 < \alpha << 1)$. Уровень сформированности навыка (знаний) АМУ равен: $Z = (p - 1/m)/(1 - 1/m) = (mp-1)/(m-1)$. Если АМУ совсем необучена, $p = 1/m$, $Z = 0$; если АМУ хорошо обучена и всегда совершает правильный выбор операции, то $p = 1$, $Z = 1$. Вследствие забывания уровень знаний уменьшается на $\beta \cdot Z$, где β — коэффициент забывания $(0 < \beta << 1)$.

Теорема 1. Если после выполнения каждого k-ого действия указывать АМУ правильный выбор, увеличивая тем самым его вероятность p на величину $\alpha(1-p) = \alpha q$, то уровень сформированности навыка (знаний) будет увеличиваться по закону $Z(t) = 1 - (1 - Z_0)\exp(-\alpha nt/k)$.

Доказательство. За время dt АМУ совершает ndt действий, при этом каждый из $(n/k)dt$ раз учитель сообщает АМУ, какое действие правильное, в результате чего вероятность p увеличивается на $\alpha(1-p) = \alpha q$. Приращение dp за время dt равно $dp = (\alpha n/k)(1-p)dt$. Имеем:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p-1} = -\int_0^t \frac{\alpha n}{k} dt, \quad \ln\frac{p-1}{p_0-1} = -\frac{\alpha n}{k}t, \quad p = 1 - (1-p_0)\exp(-\alpha nt/k).$$

Учитывая, что $p = ((m-1)Z + 1)/m$, получим доказываемое уравнение.

Теорема 2. Если каждый k-ый раз после совершения правильного действия сообщать АМУ об этом, увеличивая тем самым вероятность правильного выбора p на величину $\alpha(1-p) = \alpha q$, то уровень сформированности навыка (знаний) будет расти по логистическому закону

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\alpha n}{k} \cdot (1 - \frac{1}{m}) \cdot (Z + \frac{1}{m-1}) \cdot (1 - Z).$$

Доказательство. За время dt совершается $npdt$ правильных действий, при этом каждый из $(np/k)dt$ раз сообщается АМУ, какое действие правильное, в результате чего вероятность p увеличивается на $\alpha(1-p)=\alpha q$. Приращение вероятности правильного выбора dp за время dt равно $dp=(\alpha np/k)(1-p)dt$. Так как $p=((m-1)Z+1)/m$, то $dp=dZ(m-1)/m$. Получаем:

$$\frac{m-1}{m}\cdot\frac{dZ}{dt}=\frac{\alpha n}{k}\cdot\frac{(m-1)Z+1}{m}\cdot\left(1-\frac{(m-1)Z+1}{m}\right).$$

Отсюда следует доказываемое уравнение. При большом числе возможных операций m получаем уравнение $dZ/dt=A(Z+B)(1-Z)$.

Теорема 3. Если каждый k-ый раз при совершении неправильного действия сообщать АМУ правильный выбор, увеличивая тем самым соответствующую вероятность p на величину $\alpha(1-p)=\alpha q$, то уровень сформированности навыка (знаний) будет увеличиваться по закону:

$$Z(t)=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1-p_0}+\dfrac{\alpha nt}{k}}.$$

Доказательство. За время dt совершается $n(1-p)dt$ неправильных действий, при этом каждый из $(n(1-p)/k)dt$ раз сообщается АМУ, какое действие правильное, в результате чего вероятность p увеличивается на $\alpha(1-p)=\alpha q$. Приращение вероятности правильного выбора dp за время dt равно $dp=(\alpha n/k)(1-p)^2\,dt$. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dp}{(1-p)^2}=\frac{\alpha n}{k}dt,\qquad \int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{(1-p)^2}=\int\limits_0^t\frac{\alpha n}{k}dt.$$

При взятии интеграла следует воспользоваться подстановкой $p=\sin^2 x$. В результате имеем $p=1-1/(1/(1-p_0)+\alpha nt/k)$. Переходя к Z, получаем доказываемое уравнение.

Теорема 4. Вследствие забывания уровень знаний АМУ при отсутствии обучения уменьшается по экспоненциальному закону: $Z(t)=Z_0\exp(-\beta\cdot t)$.

Доказательство. Скорость снижения уровня знаний пропорциональна его величине Z.За время dt приращение знаний dZ составляет $dZ=-\beta\cdot Z\cdot dt$. Интегрируя, получим экспоненциальную зависимость.

Для изучения учебной деятельности с помощью АМУ удобно использовать программный способ синтеза модели. На языке *Pascal* была создана компьютерная модель деятельности АМУ, состоящей в поочередном выполнении двух действий (операций). После каждой операции АМУ делает выбор: повторить выполненную или сделать другую операцию. В случае правильного выбора операции или ошибки происходит соответствующий пересчет матрицы вероятностей. Программа содержит цикл, в котором выбор каждой операции осуществляется с помощью генератора случайных чисел. Общее число выполненных операций 500–2000. Графики, получающиеся при различных коэффициентах научения α, представлены на рис. 2. При малом α уровень знаний растет пропорционально времени (количеству выполненных операций), а при большом α достигает насыщения и остается неизменным.

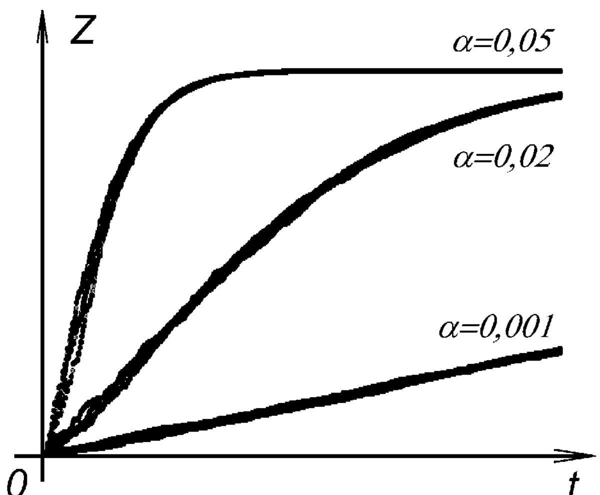


Рис. 2

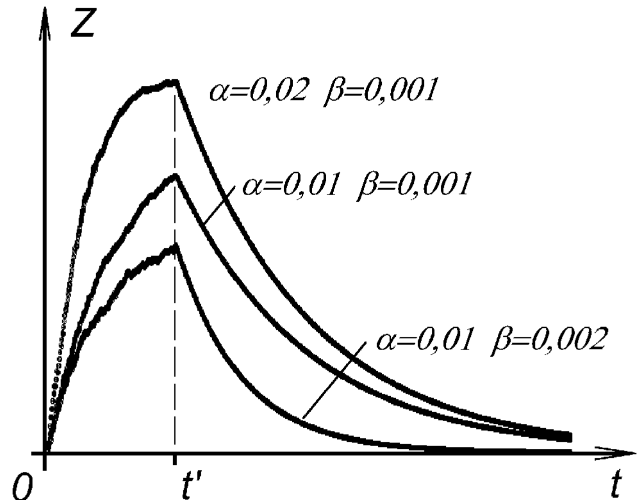


Рис. 3

На рис. 3 изображены кривые зависимостей $Z = Z(t)$ в случае, когда в течение некоторого времени t' осуществлялось обучение, а затем оно прекратилось. Видно, что к концу обучения уровень знаний достигает максимума, а затем убывает вследствие забывания. Аналогичные результаты были получены при моделировании процесса формирования эмпирических знаний [1]. Решение этой задачи для АМУ, деятельность которой сводится к выполнению четырех операций, дает похожие результаты.

Возможен более простой подход к моделированию деятельности АМУ, заключающийся в следующем. Каждый раз выбирая операцию, АМУ делает либо правильный выбор, либо ошибается. Если число возможных вариантов велико, то вероятность правильного выбора близка к 0. Ниже представлена программа, написанная на языке Basic, моделирующая обучение АМУ, в ходе которого при совершении правильного действия вероятность p увеличивается. Обучение продолжается в течение некоторого времени, затем прекращается. Программа учитывает забывание. Начальная вероятность правильного ответа равна 0,01. Получающийся график приведен на рис. 4. Видно, что уровень знаний увеличивается по логистическому закону, а после прекращения обучения уменьшается по экспоненте.

```
SCREEN 11                                   'режим экрана
```

```
LINE (0, 450)–(640, 450): LINE (10, 0)–(10, 450)            ‘оси координат
p = .01: q = 1 – p: a = .003: g = .0004                     ‘параметры
FOR t = 1 TO 10000:  x = RND(1)                             ‘начало цикла
IF (x < p) AND (t < 4000) THEN p = p + a * q: q = q – a * q ‘обучение
p = p – g * p: q = q + g * p                                ‘забывание
CIRCLE (10 + t / 15, 450 – p * 200), 1                      ‘график
NEXT                                                        ‘конец цикла
```

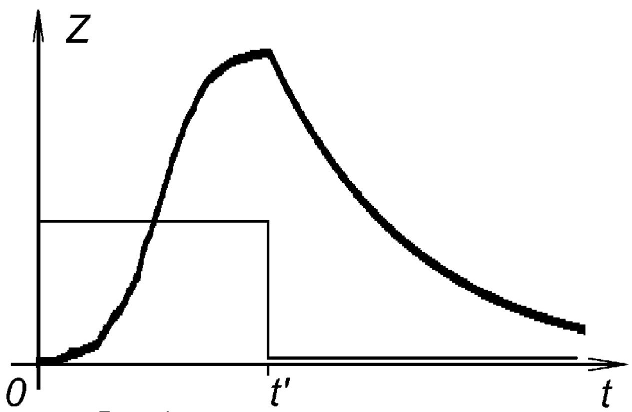


Рис. 4

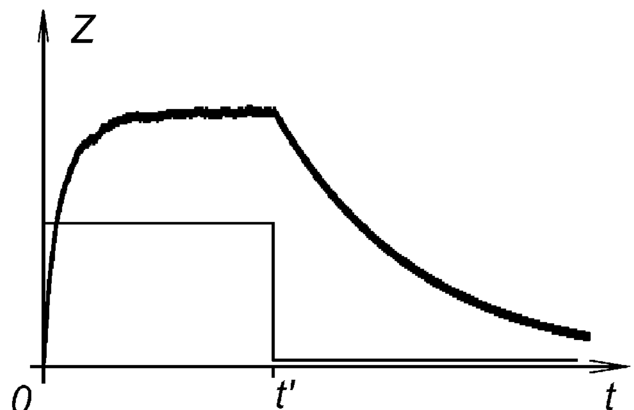


Рис. 5

На рис. 5 показана кривая зависимости уровня знаний от времени для случая, когда вероятность правильного решения увеличивается при неправильном выборе операции. Видно, что кривая научения принципиально отличается от логистической кривой, получающейся в предыдущем случае (левая часть графика на рис 4, соответствующая обучению).

Литература

1. Майер Р.В. Исследование процесса формирования эмпирических знаний по физике. — Глазов: ГГПИ, 1996. — 132 с.
2. Суходольский Г.В. Структурно–алгоритмический анализ и синтез деятельности. — Л., Изд–во Ленинградского университета: 1976.–120 с.